Final Mecanica de Fluidos

8 de Agosto de 2006

Problema 1

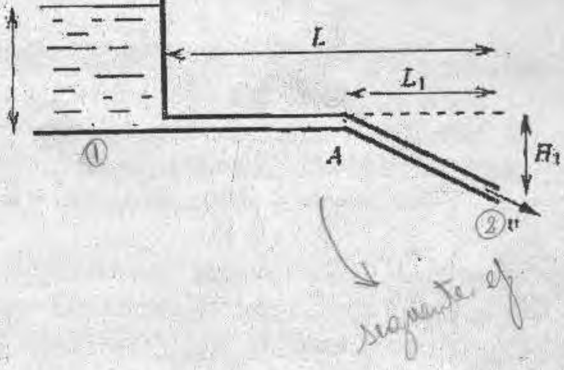
Se tiene un depósito con un conducto adosado de longitud $L = 10cm$ y diámetro $D = 1cm$, como se muestra en la Figura. El nivel del agua respecto a la salida es de $H = 60cm$. Se pide:
1. Suponiendo que el flujo es ideal, calcular la velocidad de salida y el caudal.

El flujo en realidad no es ideal, y habrá una capa límite en la pared del tubo. Supongamos que dicho espesor es pequeño frente al diámetro, para poder considerar la capa límite localmente como bidimensional, y como la correspondiente a una placa plana. Fuera de la capa límite la velocidad del agua es uniforme e igual al valor ideal antes calculado. Supongamos además que el agua entra en el tubo con un perfil uniforme de velocidad, donde no se produce ningún desprendimiento. Calcular:

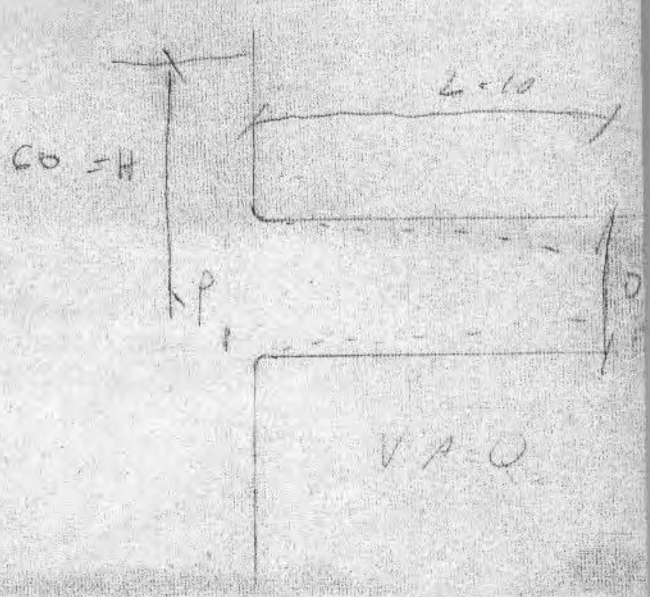
2. Los espesores de desplazamiento y cantidad de movimiento a la salida del tubo.
3. Recalcular el caudal anterior para tener en cuenta los efectos viscosos.
4. Calcular la fuerza de arrastre del agua sobre el tubo debida a los efectos viscosos.
5. Comprobar que la capa límite es laminar.
6. Estimar como cambiaría el flujo ideal a lo largo del conducto por la presencia de la capa límite.

$$\delta_1 = 1.72\left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

$$\delta_2 = 0{,}664\left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$



siguiente ej



1

$$\delta_2 = 0.664\left(\frac{\nu x}{U}\right)^{(1/2)}$$

Problema 2

Se trata de llevar agua desde un embalse en el que el nivel es de $H = 5m$ a una distancia $L = 2km$ y a una cota de $H_1 = 15m$ por debajo del fondo del embalse con una tubería de diámetro $D = 1m$ y rugosidad $k = 0.2mm$. Para ello se han dispuesto dos tramos de tubería rectos, el primero horizontal y el segundo inclinado. Se puede suponer que la pendiente de la segunda tubería es muy pequeña de maner que su longitud es igual a su proyección horizontal L_1, y que la longitud total de los dos tramos es $L = 2km$.

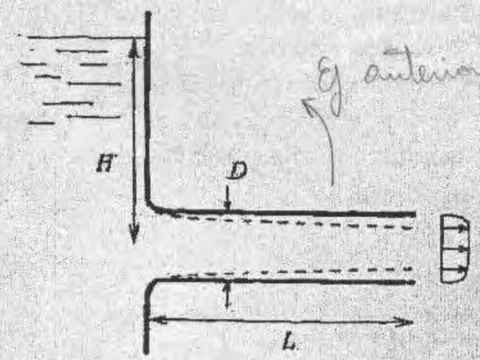
La dificultad que puede tener la configuración anterior es que si L_1 no es suficientemente grande en el punto de quiebre A, puede haber depresiones importantes y hasta cavitación que impedirían su buen funcionamiento. Despreciando todas las pérdidas locales, excepto la energía cinética del chorro de salida, se pide:

1. Caudal que circula por la tubería.

2. Valores de L_1 para que en el punto A se cumpla que:

1. La presión manométrica sea nula
2. Haya cavitación

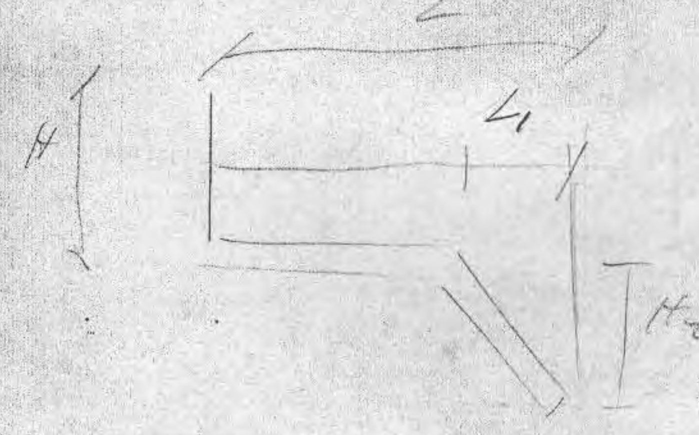
Dato: Presión de vapor a temperatura ambiente $p_v = 1600$ Pascales.



Ej anterior

$Pa = \frac{N}{m^2}$

$\rho g h = \overbrace{\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2}}^{N}\, m$



$\frac{m^2}{s}\ \frac{m}{m}\ s$

Legal

MAQ ALTERNAT

COMBUSTION

CONV DE ENERGIA

FERROSOS.

GERARDO
4521-7181
GERG GER_677@yahoo.com.ar

COLOQUIO

multiple choice (&)

Kutta
A = solo naca
B = solo joukowski
C = cualquier alar & ✓
D = cualquier cuerpo

efecto magnus inverso en flujo viscoso
a = depende de RE & ✓
b = depende de la velocidad del cuerpo & ✓
c = ocurre para cualquier valor de los anteriores
d = siempre en fluido viscoso cuando un cuerpo rota

el caso de capa de vórtices en un fluido viscoso
a = ejemplo de convección vs. vorticidad compiten NO
b = ejemplo donde no hay interferencia entre convección y difusión de la vorticidad & ✓
c = ejemplo de difusión pura de la vorticidad ✓
d = ejemplo de que la vorticidad no difunde NO

el perfil de velocidad en un conducto circular es
a = paraboloide & ✓
b = logarítmico
✗ c = es independiente de la viscosidad & NO $V_z(r) = \frac{K}{4\mu}(R^2 - r^2)$ 
d = coincide con el del flujo turbulento

$< \mu$

el diagrama de moody se puede usar:
a = solo si conozco la rugosidad del tubo & ✓
b = solo si conozco las propiedades físicas del fluido & → Necesito ν o μ y ρ para calcular Re. Si conozco Re se puede usar.
c = en un flujo compresible
d = en un conducto de cualquier forma & ✓

en la descomposición de RE
a = los valores medio de V que se determina no tienen utilidad
b = los valores medio de V permiten determina frecuencia incluid en un movimiento
c = los valores medio de V son la media temporal de la V & ✓
d = los valores medio de V son la medioia espacial de la V

el espesor de capa limite laminar en placa es
a = mayor que la capa limite turbulenta
b = igual que la capa limite turbulenta
c = menor que la capa limite turbulenta & ✓
d = independiente de la viscosidad

la teoria de kolmogorof acerca de turbulencia
a = hay un espectro de tamaño de vorticidad ilimitado
b = hay un espectro de tamaño de vorticidad con máx. y min. & ✓
c = los vórtice mas grandes se ocasionan con frecuencia mas elevadas
d = los vórtice mas pequeños son los que disipan la > parte de energía & ✓

convergente el 1º

el atoramiento de la tobera puede ocurrir en la garganta de
a= toberas convergentes &
b = toberas divergencia
c= toberas convergente y divergenciaente &
d =divergenciaente convergente

los parámetros críticos del flujo compresible
a= función del fluido considerado &
b = función de la v del fluido
c = función de la forma
d= función de las condiciones del fluido en el recipiente en reposo

el factor de fricción en un conducto representa
a = solo las perdidas de energía del fluido como consecuencia de fricción en paredes
b =solo las perdidas de energía del fluido como consecuencia de fricción en part. fluidas
c= las perdidas de energía por fricción contra las pared y seno del fluido &
d = no representa perdidas de energía en el fluido

el perfil de Velocidades de un flujo de covet.pois. depende
a=la presión en el canal considerado & → la dif de presión
b=la velocidad de las pared &
c=coeficiente de visco del fluido &
d =la densidad del fluido

la paradoja de dalambert par un cuerpo avanzando en un fluido invisido
a=es valida independientemente de la forma &
b=no es valida si el cuerpo avanza en una superficie &
c=es valida solo si el fluido es incompresible & ?
d =es siempre valida

a través de una onda de choque hay
a=salto de presión &
b=salto de densidad &
c=salto de entropía &
d =ninguno de los anterior

las sobre presiones máx. en el fenómeno golpe de ariete
a =independientemente de la l del conducto → No si $T_{c} > T_{cr}$
b =independientemente del tiempo de cierre
c =independientemente de la V del fluido → En realidad del ΔV
d=depende de todos los parámetros anteriores &

el diagrama de moody se puede utilizar
a=para gases &
b =para no newtonianos
c= liquidos &
d=flujo laminares &

separación de la capa limite
a=ocurre con adverso de presiones &
b=depende de perdida de energía en pared &
c =solo ocurre en cuerpos mal diseñados aerodinámicamente
d =no ocurre si el flujo es turbulento

La fricción parietal en una capa limite turbulenta con respecto a una laminar

a) =
b) > &
c) <
d) a veces > y a veces <

En un punto cuya posición es interior a la capa limite con coordenadas x0 e y0
la presión es

a) coincidente con la p en un punto que tiene la
misma coordenada x0 y la otra y del interior de la capa limite
con "y" variando entre 0 y δ&
b) coincidente con la p en un punto que tiene la
misma coordenada x0 pero y correspondiente a la frontera de capa limite
con y =δ&
c) diferente a la de un punto que tiene la misma coordenada x0
pero con coordenada y del interior de la capa
con "y" variando entre 0 y δ
d) diferente a la de un punto que tiene la misma coordenada x0
pero con coordenada y correspondiente a la frontera de capa limite
con y =δ

4) Fuerza de fricción en las paredes de un tubo circula un fluido en régimen turbulento
se propone

Vz =Vzmax(1-r/R)1/n

si los esfuerzos en la pared se calculan con

TM=-μ.dVz/dr
opinar

a)el cálculo es correcto

b)el calculo es incorrecto debería efectuarse TM=-(μ+—□t).dVz/dr

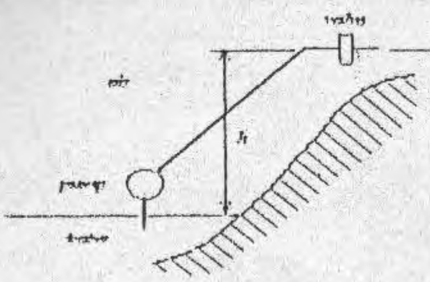
c)el cálculo es incorrecto porque en la pared las tensiones aparentes o turbulentas son preponderantes y la expresión del perfil de velocidades no la contempla

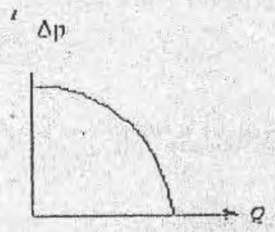
d)el calculo es incorrecto porque en la pared hay que considerar una ley diferente a la que surge del perfil de velocidades &

COLOQUIO 7

8

Problema 1





Una bomba envía agua a un caudal Q a través de una cañería de diámetro D que posee cerca de un extremo una válvula parcialmente cerrada. La salida, a la atmósfera, se ubica a una altura h por sobre la superficie del depósito de donde se extrae el agua. La caída de presión en la bomba se relaciona con el caudal Q según:

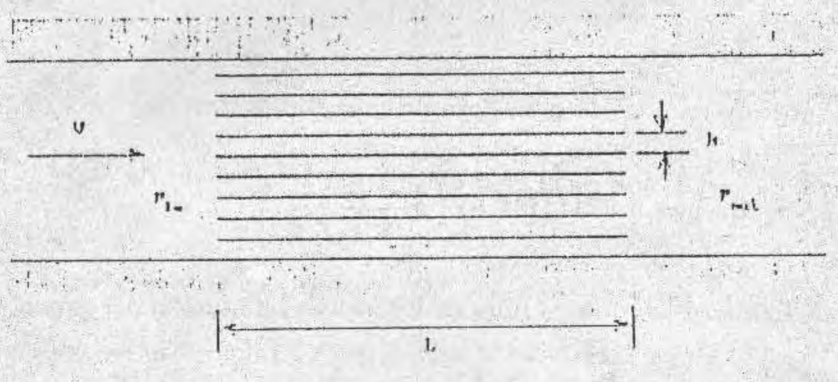
$$\Delta p = A - B \cdot Q^2$$

donde A y B son constantes conocidas. La eficiencia de la bomba η es independiente de Q. El coeficiente de pérdida en la válvula es K_v. La longitud de las cañerías es 40 mts.

a) Encontrar una expresión para el caudal en términos de los parámetros ρ, A, B, h y K_v.

b) Encontrar una expresión para la potencia de la bomba en términos de los parámetros anteriores.

Problema 2



Un dispositivo que impide la propagación de llama en el conducto de nafta de un motor a explosión consiste en una serie de placas paralelas alineadas con el flujo de admisión como se ilustra en la figura. El espaciado entre placas es h y la longitud de cada placa es L. Suponiendo flujo incompresible, encontrar expresiones para la caída de presión entre la entrada y la salida del conducto (p_{in}-p_{out}) para los siguientes casos:

a) Entre cada par de placas se establece flujo de Poiseuille.

b) Se desarrollan capas límite laminares en cada superficie de las placas que interfieren entre sí.

Datos

. Capa límite laminar

$$C_f(x) = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U\,x}{\nu}$$

Capa límite turbulenta

$$C_f(x) = 0.024\,\mathrm{Re}_{x'}^{-1/7}$$

$$\mathrm{Re}_{x'} = U\,\frac{x - x0}{\nu}$$

Transición de capa límite laminar a turbulenta (x=x0) para Re_x=3 10^5

c) Cuál de las hipótesis de cálculo de los puntos anteriores se corresponde con un mayor caudal.
d) Calcular número de Re para el que la caída de presión en los puntos anteriores a) y b) sea igual si L= 10 h.

Notas:

Expresión del arrastre en una placa en flujo de capa límite laminar.

$$\mathcal{D} = 2\left(W\int_0^L \tau_w\,dx\right) = 0.6641(2WL)\left(\frac{\rho\mu V_\infty^3}{L}\right)^{1/2}$$

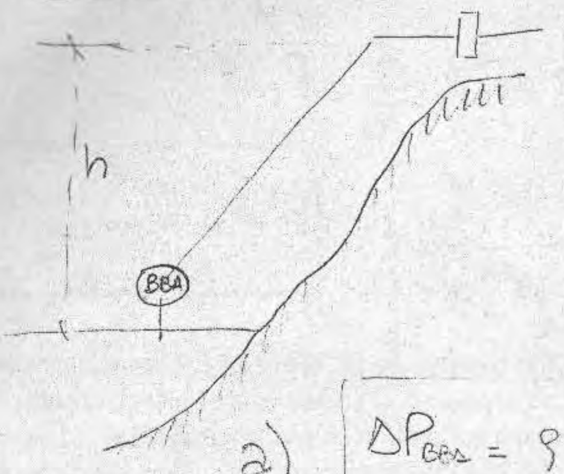
Expresión de la caída de presión en flujo de Poiseuille en función del caudal Q

$$\frac{Q}{W} = \frac{h^3}{12\mu}\left(-\frac{dp'}{dx}\right)$$

WxL = área mojada

Siendo W la profundidad de la placa

EJERCICIO:



DATOS: $Q =$ $\quad K_v =$

$D =$ $\quad L = 40\,m$

$h =$

$$\Delta P = A - BQ^2$$

a) $$\boxed{\Delta P_{BBA} = \rho g h + \underbrace{\Delta P_{fricc} + \Delta P_{VALV}}_{\rho g \Delta h}} \quad (I)$$

siendo $\Delta h = h_f + \Sigma h_k =$

$$\Delta h = \frac{U^2}{2g}\left[f \frac{L}{d} + \Sigma K\right] =$$

siendo $Q = U \cdot \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \boxed{U = \frac{4Q}{\pi D^2}}$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4 2g}\left[f \cdot \frac{40}{D} + K_v\right]$$

reemplazando todo en (I) es:

$$\underbrace{A - BQ^2}_{\Delta P_{BBA}} = \rho g h + \rho g \frac{\overbrace{16Q^2}^{U^2}}{\pi^2 D^4 2g}\left[f \cdot \frac{40}{D} + K_v\right] =$$

$$A - \rho g h = \rho \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4 2}\left[f \cdot \frac{40}{D} + K_v\right] + BQ^2$$

$$A - \rho g h = Q^2 \underbrace{\left[\frac{\rho 8}{\pi^2 D^4}\left(f \cdot \frac{40}{D} + K_v\right) + B\right]}_{K_1} \Rightarrow A - \rho g h = Q^2 K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{A - \rho g h}{K_1}}} \quad \text{con } K_1 = \frac{8\rho}{\pi^2 D^4}\left(f \frac{40}{D} + K_v\right) + B$$

b) $Pot = F \cdot V = Fza \cdot Vel$

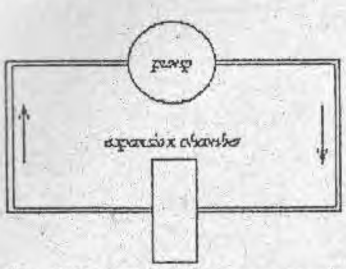
en este caso: $\left.\begin{array}{l} F = P \cdot A \\ V = Q/A \end{array}\right\} \Rightarrow Pot = P \cdot \cancel{A} \cdot \dfrac{Q}{\cancel{A}} = \overset{\text{Presión}}{P} \cdot Q$

$Pot = N = \Delta P \cdot Q$

$N = (A - BQ^2) \cdot Q = \boxed{AQ - BQ^3 = N}$

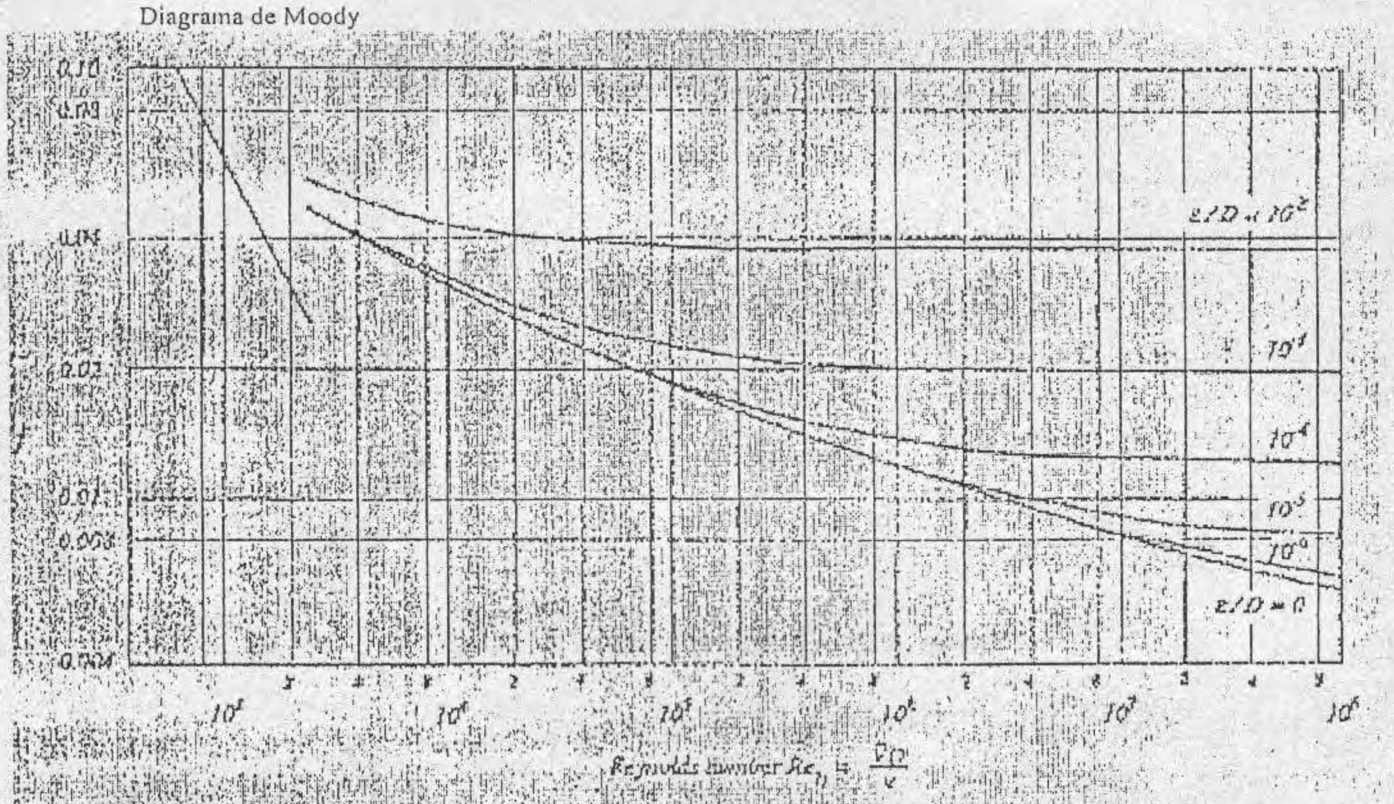
la pot de la bba es:

$$\boxed{N = \frac{(AQ - BQ^3)\,\eta}{\cancel{\eta}}}$$



Problema 1. (3,0 puntos) El sistema de la figura consiste en una bomba que mueve un fluido refrigerante a través de una cañería de longitud L=10m, diámetro 5 cm y rugosidad nula. La cañería tiene cuatro codos, los cuales tienen un coeficiente de pérdida de K=1,0 respectivamente. La bomba es accionada con un gasto de potencia P=10 kW y tiene una eficiencia η=0,6. La densidad del refrigerante es ρ=1000 kg / m^3 y su viscosidad μ=2 . 10^{-3} Ps. Montada en la línea se encuentra una cámara de expansión de área transversal mucho mayor que la del caño. Los coeficientes locales de pérdida para la entrada del caño al accesorio y salida de éste al caño son K=0,4 y K=0,1 respectivamente.
Calcular el caudal volumétrico Q a través de la cañería.

Diagrama de Moody

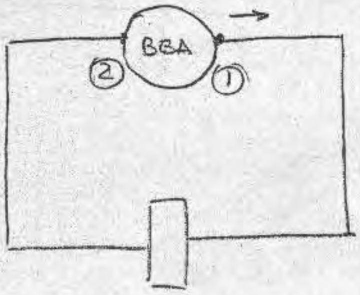


475

475.0 : 6

EJERCICIO:

$1\,Ps = 0{,}1\, kg/m\,s$



$$\left\{\begin{array}{l} L = 10\,m \\ \phi = 5\,cm \\ P_B = 10\,kW = 10.000\,Nm/s \\ \eta = 0{,}6 \\ \rho = 1000\,kg/m^3 \\ \mu = 2\,10^{-3}\,Ps = 2\,10^{-4}\,\frac{kg}{m\,s} \end{array}\right.$$

no hay ~~h~~ puesta

- $$P_1 + \cancel{\rho g h_1} + \cancel{1/2 \rho U_1^2} = P_2 + \cancel{\rho g h_2} + 1/2 \rho U_2^2 + \rho g \left[\Delta h - \cancel{h_{BBA}}\right]$$

siendo $\Delta h = h_f + \Sigma h_L = \frac{U^2}{2g}\left[\frac{f.L}{d} + \Sigma K\right]$

bba

$$P_1 - P_2 = \rho g \left[\Delta h\right] \qquad \text{con} \quad P_1 - P_2 = \Delta P = \text{ originado x la bba}$$

$$\eta . Pot = F . v = \Delta P . A . v_\eta \Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{Pot . \eta}{A . U}}$$

Calculo el Δh: $\quad \Sigma K = 4 . K_c + 0{,}4 + 0{,}1 = 4.1 + 0{,}4 + 0{,}1 = 4{,}5 = K$ (cantidades)

- ahora debo calcular el f: supongo una velocidad, calculo el Re, entro al Moody, corto la curva de tubos lisos y saco el f de la formula:

$$\Delta P = \frac{Pot . \eta}{A . U} = \rho g \frac{U^2}{2g}\left[\frac{f.L}{d} + \Sigma K\right]$$

$$\Rightarrow U^3 = \frac{Pot . \eta\, 2\cancel{g}}{A \rho \cancel{g} \left[f . \frac{L}{d} + \Sigma K\right]} \Rightarrow \boxed{U = \sqrt[3]{\frac{Pot . \eta . 2}{A \rho \left[f\, L/d + \Sigma K\right]}}}$$

despejo la velocidad.

reemplazando valores es:

$$U = \sqrt[3]{\frac{10000\ kg\,m/s^2\ m/s \,.\, 0{,}6 \,.\, 2}{\pi \,.\, 0{,}05 m^2 \,.\, 1000\ kg/m^3 \left[f\left(\frac{10}{0{,}05}\right) + 4{,}5\right]}} = \sqrt[3]{\frac{12000}{7{,}85\left[f \,.\, 200 + 4{,}5\right]}} =$$

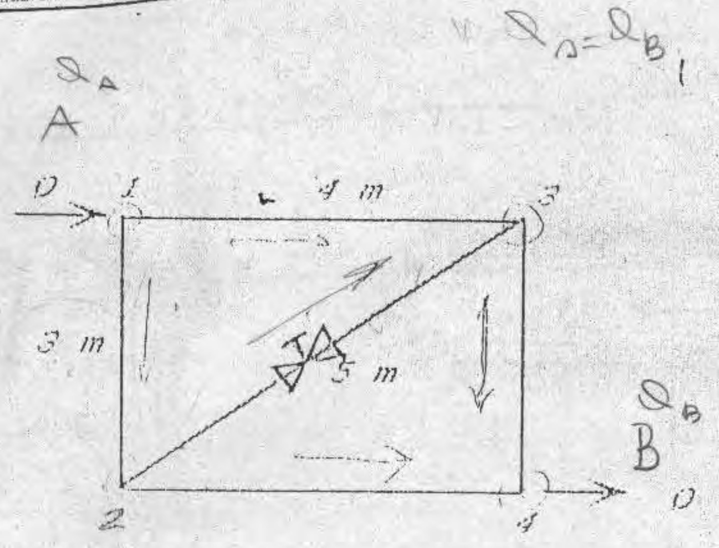
haciendo las iteraciones:

V	Re	f	Vcalc
1	250.000	0,013	6
0,5	125.000	0,015	5,88

$$Re = \frac{V \,.\, D}{\nu} = \frac{V \,.\, D\, \rho}{\mu} =$$

$$Re = \frac{U \,.\, 0{,}05 \,.\, 1000\ kg/m^3}{2 \,.\, 10^{-4}\ kg/m\,s}$$

$$Re = U \,.\, 250.000 \triangleq$$



155110 0913

Gustabo Prolli

14106592

26157921

1. La red de cañerías que muestra la figura, recibe agua desde el nodo 1 y la descarga en el nodo 4. La diferencia de presión entre los nodos 1 y 4 es de 10 kPa. Las longitudes de los segmentos son de 3m, 4m y 5m, y los caños son lisos de diámetro D= 1 cm. Calcular el caudal Q.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.03\,\lg(Re\ \sqrt{\lambda}) - 0.8$$

$$\lambda = 2\ \frac{\Delta P\ \phi}{\underbrace{\Delta x}_{\ell}\ \rho U^2} \rightarrow \Delta P = \lambda \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\ell}{D}$$

new

$$\boxed{K_{valv} = 8.2} \qquad \Delta P_{valv} = K \cdot \frac{1}{2} \rho\, U^2$$

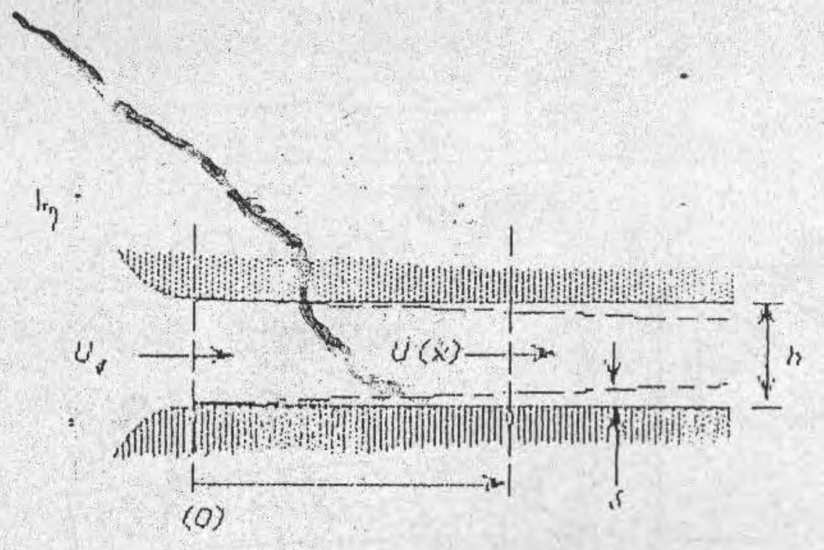
2. Se muestra la cámara de ensayo de un túnel de viento de sección rectangular de altura h y ancho b (b >> h). La velocidad del túnel U es lo suficientemente baja como para que el flujo sea incompresible. El flujo que ingresa en la sección 0 es uniforme en presión (p_0) y velocidad (U_0). Una capa límite se desarrolla en la pared del túnel, empezando desde la sección 0 donde x=0. El flujo principal es desplazado por la presencia de esta capa límite en las paredes de manera que cambia su velocidad desde U_0 a $U(x)$ y su presión desde p_0 a $p(x)$ a medida que se mueve aguas abajo. Suponiendo flujo laminar en la capa límite, encontrar expresiones para $U(x)$ y $p(x)$ en términos de los parámetros U0, h y las propiedades del aire ρ y μ.

Suponer:

$$\delta(x) = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \qquad \text{espesor de la capa límite}$$

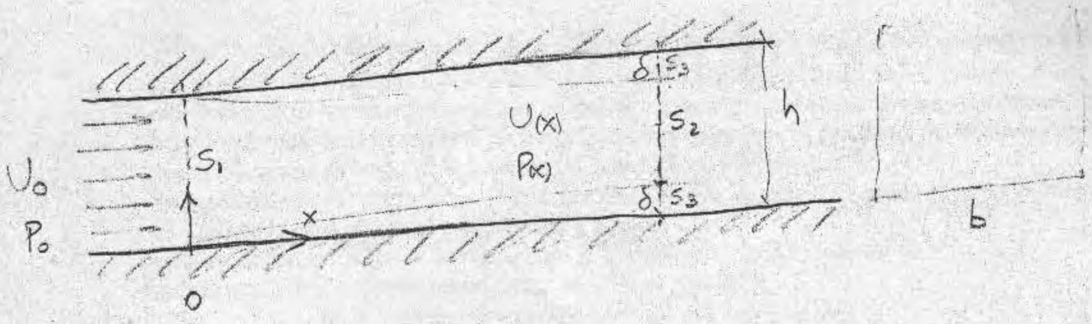
$$u(x,y) = U(x)\cdot \operatorname{sen}(\pi y / 2\delta) \qquad \text{velocidad dentro de la capa límite laminar}$$

$$\frac{m^3}{s} \cdot \frac{m}{m} \cdot s$$



U(x)
h
(0)

EJERCICIO:



$\begin{cases} U_0 \\ P_0 \end{cases}$

siendo $\begin{cases} \delta_{(x)} = 5\sqrt{\dfrac{\nu . x}{U_0}} \\ u_{(x,y)} = U_{(x)} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi y}{2\delta}\right) \end{cases}$

- Plantea conservación de la masa:

$$\iiint_V \cancelto{0}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} dV + \oiint_S \rho \bar{u}.\bar{n}\, dS = \dot{m} \qquad (I)$$

$$\oiint_S \rho \bar{u}.\bar{n}\, dS = 0 \Rightarrow \boxed{-\iint_{S_1} \rho u_0\, dS + \iint_{S_2} \rho U_{(x)}\, dS + 2\iint_{S_3} \rho\, u_{(x,y)}\, dS = 0}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \rho U_0\, dS = \iint_{S_2} \rho U_{(x)}\, dS + 2\iint_{S_3} \rho\, u_{(x,y)}\, dS =$$

como es: $U_{(\ell)} = u_{(\ell,\delta)} = U_{(\ell)} \operatorname{sen} \dfrac{\pi\delta}{2\delta} = U_{(\ell)}$

-

$$\rho U_0 h.b = \rho U_{(\ell)}(h-2\delta).b + 2\rho U_{(\ell)} b \underbrace{\int_0^\delta \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2\delta}\, dy}_{} =$$

$$U_0 h = U_{(\ell)}(h-2\delta) + 2U_{(\ell)} \int_0^\delta \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2\delta}\, dy =$$

$$(I) \int_0^\delta \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2\delta}\, dy = -\frac{2\delta}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2\delta}\Big|_0^\delta = \overset{(I)}{\frac{2\delta}{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_0 h = U_{(\ell)}(h-2\delta) + 2U_{(\ell)}\frac{2\delta}{\pi}}$$

Pero para hallar la $U(x)$ genérica, despejo $U(x)$ de la (I)

con $U(\ell) = U(x) \Rightarrow U_0 h = U(x)(h-2\delta) + 2U(x)\frac{2\delta}{\pi} =$

$$U_0 h = U(x)(h-2\delta) + 4U(x)\frac{\delta}{\pi} =$$

$$U_0 h = U(x)\left[(h-2\delta) + \frac{4\delta}{\pi}\right]$$

como es $\delta = \delta(x) = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$ reemplazo y queda:

$$U_0 h = U(x)\left[\left(h - 10\sqrt{\nu x/U_0}\right) + \frac{20}{\pi}\sqrt{\nu x / U_0}\right] \qquad \text{con } \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$U(x) = \frac{U_0 h}{h - 10\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}} + \frac{20}{\pi}\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}}} = \boxed{\frac{U_0 h}{h + \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}}\left(-10 + \frac{20}{\pi}\right)} = U(x)}$$

Para hallar $p(x)$ planteo Bernoulli entre U_0 y $U(x)$

$$\tfrac{1}{2}\rho U_0^2 + \rho g h_1 + P_0 = \tfrac{1}{2}\rho U(x)^2 + \cancel{\rho g h_1} + P(x,y)$$

$$\tfrac{1}{2}\rho U_0^2 + P_0 = \tfrac{1}{2}\rho U(x)^2 + P(x,y)$$

$$P(x,y) = \tfrac{1}{2}\rho U_0^2 - \tfrac{1}{2}\rho U(x)^2 + P_0 = \tfrac{1}{2}\rho\left(U_0^2 - U(x)^2\right) + P_0$$

$$P(x,y) = \tfrac{1}{2}\rho\left[U_0^2 - \left(\frac{U_0 h}{h + \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}}\left(-10 + 20/\pi\right)}\right)^2\right] + P_0$$

$$\boxed{P(x,y) = \tfrac{1}{2}\rho U_0^2\left[1 - \frac{h}{h + \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}}\left(\frac{20}{\pi} - 10\right)}\right] + P_0}$$

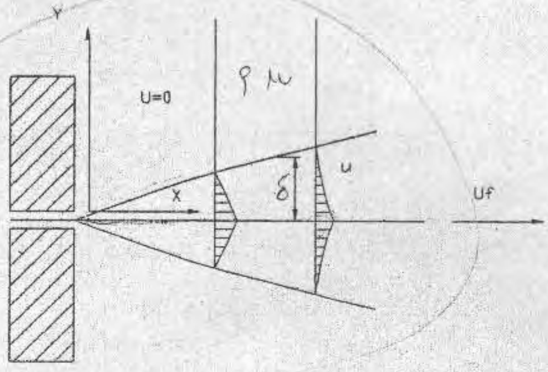
1) Una lámina de plástico es extrudada a través de una ranura y es jalada en un medio donde el gas se encuentra en reposo (ρ y ν constantes), a una velocidad constante U_f. A causa de la condición de no deslizamiento el aire es puesto en movimiento por la lámina y se desarrolla una capa limite que tiene un espesor de desplazamiento negativo. El gradiente de presiones dp/dx en el gas en reposo es cero (y por lo tanto en la capa límite es cero).
Se desea calcular el coeficiente de fricción de la lámina de plástico usando el método integral. El flujo de la capa límite es estacionario y laminar.

a)Plantear las condiciones de borde para la componente de la velocidad u.

b)Para una distribución de velocidades en la capa límite

$$u/Uf = a + b.y/\delta + c(y/\delta)^2$$

Calcular las constantes a, b y c a partir de las condiciones de borde y de la suposición que las tensiones por fricción se desprecian en el inicio de la capa límite ($y=\delta$, δ es el espesor de la



capa límite).

c)El espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se define como

$$\int_0^\delta (U_f - u)u\,dy = \delta_2 U_f^{\,2}$$

Mostrar a partir de métodos integrales que

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2}$$

d)Para la distribución de velocidades especificada encontrar la relación δ_2/δ

e)Encontrar la relación entre la tensión de fricción en la pared τ_w y δ_2

f) Encontrar la ecuación diferencial para $\delta_2^{\,2}$ a partir de la ecuación de c). Resolverla para $\delta_{2(x=0)}=0$

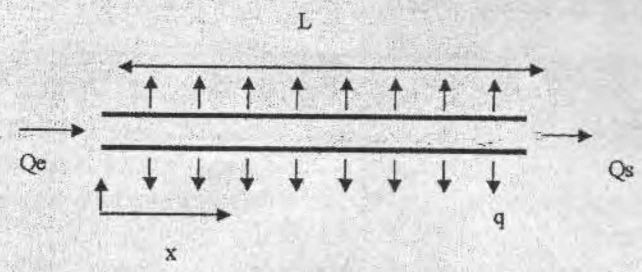
g)Determinar el coeficiente de fricción

$$c_f\sqrt{\frac{U_f x}{\upsilon}} = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2/2}\sqrt{\frac{U_f x}{\upsilon}}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U_\infty(x,\delta)}\left(\frac{\partial U_\infty(x,\delta)}{\partial x}\right)(\delta_1 + 2\delta_2) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^{\,2}(x,\delta)}$$

2)

a- En la cañería de la figura circula un caudal Q que es variable con la coordenada x. En la misma entra un caudal Qe y fluye hacia el exterior en forma uniforme y a lo largo de todo el recorrido L un caudal constante por unidad de longitud q. Determinar en función de los caudales de entrada Qe y de salida Qs la caída de presión desde la entrada a lo largo de la coordenada x.



b- Proponga una expresión de un caudal de entrada equivalente para estimar la caída de presión como si no hubiese flujo hacia fuera, cuando el caudal de salida Qs es nulo.

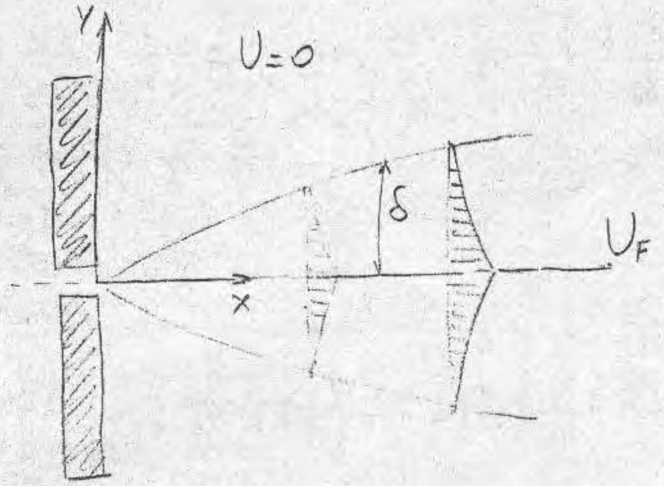
c- Para un sistema antincendio de dos ramales idénticos en paralelo de sprinklers ubicado en un 15° piso. dimensionar la cañería (rugosidad media = 0.1mm) y estimar el salto de presión que debe imponer una bomba ubicada en planta baja para que el sistema funcione correctamente suponiendo que :

- cada ramal tiene 40 sprinklers distribuidos uniformemente a lo largo del ramal en una longitud de 20 ms.
- por cada sprinkler se deben evacuar 1 l/min
- las perdidas localizadas en cada sprinkler son para ese caudal de 1 kPa
- el resto de las pérdidas localizadas se pueden despreciar
- la altura de un piso es de 3ms.

Viscosidad del agua=1 10^{-6} m^2/s

d- Se selecciona una bomba que permite obtener los caudales de funcionamiento con el salto de presiones necesario que surgen de cálculo y cuya relación caudal-salto de presión es aproximadamente una constante. Determinar los caudales suministrados por los sprinklers en ambos ramales, cuando un ramal se obstruye inutilizando la ultima mitad del ramal.

EJERCICIO:



a) Condiciones de borde para U_F: $\quad U_F(x,y) = U_F$

si $\underline{y=0} \Rightarrow \boxed{U_F(x,0) = U_F}$

si $\underline{y=\delta} \Rightarrow \boxed{U_F(x,\delta) = 0}$

siendo: $\tau_{w(y=\delta)} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_w\Big|_\delta = \mu \dfrac{dU}{dy}\Big|_\delta = 0}$

b) $\boxed{u/U_F = a + b\,y/\delta + c\,(y/\delta)^2}$ distribución de vel. de la capa límite.

$\underline{\text{Para } y=0} \to u = U_F \Rightarrow a + b\overset{0}{y/\delta} + c\,(\overset{0}{y/\delta})^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$ ✓

$\underline{\text{Para } y=\delta} \to u = 0 \Rightarrow \quad 1 + b\,\underbrace{y/\delta}_{1} + c\,(\underbrace{y/\delta}_{1})^2 = 0 \Rightarrow \boxed{1 + b + c = 0}$ (I)

∴ luego $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_F\left[b/\delta + 2\dfrac{c}{\delta^2}y\right]$

$\mu \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_\delta = 0 \Rightarrow \mu U_F \underbrace{\left[b/\delta + 2\,c/\delta^2\,y\right]\Big|_\delta}_{=0} = 0 \Rightarrow b/\delta + 2\,c/\delta^2\,\delta = 0$

$\boxed{b/\delta + 2\,c/\delta = 0}$ (II)

de (I) y (II) queda un $\underline{2\times 2}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1+b+c=0 \\ b/\delta + 2c/\delta = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow b=-(c+1)=-c-1 \quad \Rightarrow b=-1-1=\boxed{-2} \\ \rightarrow \frac{-c-1}{\delta} + 2c/\delta = 0 \rightarrow -\frac{c}{\delta}-\frac{1}{\delta}+\frac{2c}{\delta}=0 \end{array}$$

$$\frac{c}{\delta}-\frac{1}{\delta}=0 \Rightarrow \frac{c}{\delta}=\frac{1}{\delta}$$

$$\Rightarrow c=\frac{\delta}{\delta}=1 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

reemplazando $\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{U_{(x,y)} = U_F\left[1-2\,y/\delta+(y/\delta)^2\right]}$

d) $\displaystyle\int_0^\delta (U_f-u)\,u\,dy = \delta_2 U_f^2$ resuelvo la integral

$$\frac{1}{U_f^2}\int_0^\delta (U_f-u)\,u\,dy = \delta_2$$

$$\frac{1}{U_f^2}\int_0^\delta U_f\left(1-\frac{u}{U_f}\right)u\,dy = \frac{1}{U_f}\int_0^\delta \left(1-u/U_f\right)u\,dy = \frac{1}{U_f}\int_0^\delta \left(u-\frac{u^2}{U_f}\right)dy =$$

$$= \int_0^\delta \frac{u}{U_F}\left(1-\frac{u}{U_f}\right)dy = \int_0^\delta \frac{\cancel{U_F}\left(1-2y/\delta+(y/\delta)^2\right)}{\cancel{U_F}}\left(1-\frac{\cancel{U_F}\left(1-2y/\delta+(y/\delta)^2\right)}{\cancel{U_F}}\right)dy =$$

$$= \int_0^\delta \left[1-2y/\delta+(y/\delta)^2\right]\left[\cancel{1}-\cancel{1}+2y/\delta-(y/\delta)^2\right]dy =$$

$$= \int_0^\delta \left(2y/\delta-(y/\delta)^2\right) - 2y/\delta\left(2y/\delta-(y/\delta)^2\right) + (y/\delta)^2\left(2y/\delta-(y/\delta)^2\right)dy =$$

$$= \int_0^\delta 2y/\delta - y^2/\delta^2 - 4y^2/\delta^2 + 2y^3/\delta^3 + 2y^3/\delta^3 - y^4/\delta^4\,dy =$$

$$= \int_0^\delta 2y/\delta - 5(y/\delta)^2 + 4y^3/\delta^3 - y^4/\delta^4\,dy = \delta_2$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\delta\cancel{2}}y^2 - \frac{5}{3\delta^2}y^3 + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\delta^3}y^4 - \frac{y^5}{\delta^4 5}\Bigg|_0^\delta = \delta - \frac{5}{3}\delta + \delta - \frac{1}{5}\delta = \boxed{\frac{2}{15}\delta = \delta_2}$$

e) la relación es:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2} \Rightarrow \boxed{\tau_w = \rho U_f^2 \frac{d\delta_2}{dx}}$$

otra manera es:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \mu U_F\left(-2/\delta + \frac{2y}{\delta^2}\right)$$

siendo $\delta = \frac{15}{2}\delta_2 \Rightarrow \boxed{\tau_w = \mu U_F\left(-\frac{2}{15/2\,\delta_2} + \frac{2y}{(15/2\,\delta_2)^2}\right)}$

Para $y=0 \Rightarrow \tau_w = \mu U_F\left(-\frac{2}{15/2\,\delta_2}\right) = \boxed{-\frac{4\mu U_F}{15\delta_2} = \tau_w}$ NO.

f) la ecuación diferencial es:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2} \Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{-\mu U_F/15\delta_2}{\rho U_f^2} =$$

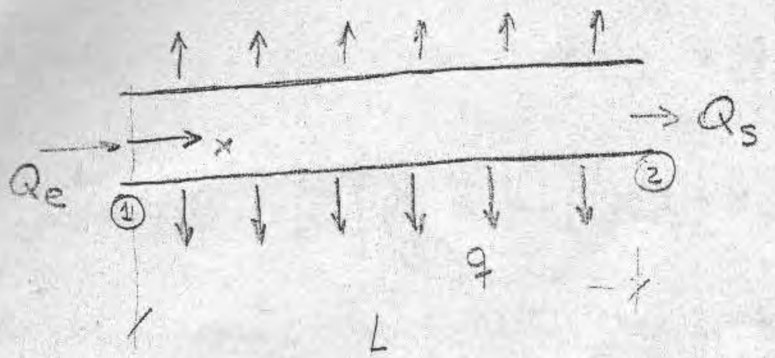
$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{-\mu}{15\delta_2 \rho U_f} \Rightarrow \delta_2\, d\delta_2 = -\frac{\mu}{15\rho U_f}\, dx \Rightarrow \text{integrando}$$

$$\int \delta_2\, d\delta_2 = -\frac{\mu}{15\rho U_f}\int dx \Rightarrow \boxed{\frac{\delta_2^2}{2} = -\frac{\mu}{15\rho U_f}\, x + cte}$$

si es $\delta_{2(x=0)} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\mu}{15\rho U_f}\cdot 0 + cte \Rightarrow \boxed{cte = 0}$

g) $$C_f\sqrt{\frac{U_f \cdot x}{\nu}} = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2/2}\sqrt{\frac{U_f \cdot x}{\nu}} \Rightarrow \boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_f^2/2}}$$

EJERCICIO:



$q_L = cte$

a) El caudal q' circula por la cañería lo puedo expresar:

$$\boxed{Q_{(x)} = Q_e - q_L \cdot x} \qquad \text{con } q_L = \text{caudal perdido}$$

la caída de presión en el caño es:

$$\boxed{\Delta P = f \tfrac{1}{2} \rho U^2 L/D}$$

Como es: $Q = U.A \Rightarrow U = Q/A \Rightarrow U^2 = (Q/A)^2 = \frac{Q^2}{A^2}$

$$\Delta P = f \cdot \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{L}{D} = f \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi . D^2}{4}\right)^2 D} L = f \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D^4 D}{16}} L = \boxed{8 f \rho \frac{Q^2 L}{\pi^2 D^5} = \Delta P}$$

llamando $K = \frac{8 f \rho}{\pi^2} \Rightarrow \boxed{\Delta P = K \frac{Q^2 L}{D^5}}$

Pero el caudal no es cte, el caudal es $Q = Q_{(x)}$

$Q_{(x)} = Q_e - q_L . x \Rightarrow \Delta P = K (Q_e - q_L x ...$

haciendo $\underline{\Delta P = dP}$ y $\underline{dx = L}$ ⇒ reemplazando queda:

$$dP = \frac{K}{D^5} (Q_e - q_L . x)^2 dx \Rightarrow \Delta P \Big|_0^L = \frac{K}{D^5} \int_0^L (Q_e - q_L x)^2 dx =$$

$$\Delta P\Big|_0^L = \frac{K}{D^5}\int_0^L \underbrace{(Q_e - f_L . x)^2}_{Q_e^2 - 2Q_e f_L x + f_L^2 x^2} dx =$$

$$\Delta P\Big|_0^L = \frac{K}{D^5}\int_0^L (Q_e^2 - 2Q_e f_L x + f_L^2 x^2)\,dx = \frac{K}{D^5}\left[Q_e^2 x - Q_e f_L x^2 + \frac{f_L^2}{3}x^3\right]\Big|_0^L$$

$$\boxed{\Delta P\Big|_0^L = \frac{K}{D^5}\left[Q_e^2 L - Q_e f_L L^2 + \frac{f_L^2 L^3}{3}\right]}$$ caida de Presion

si hacemos: $Q_p = f.L$ = caudal perdido en el camino.

$$\Delta P\Big|_0^L = \Delta P = \frac{K}{D^5}L\left[Q_e^2 - Q_e \underbrace{f_L . L}_{Q_p} + \frac{\overbrace{f_L^2 L^2}^{Q_p^2}}{3}\right] = \frac{K}{D^5}L\left[Q_e^2 - Q_e Q_p + \frac{Q_p^2}{3}\right] =$$

operando con el paréntesis es:

$$\left[Q_e^2 - Q_e Q_p + \frac{Q_p^2}{3}\right]$$ completo cuadrados:

$$\left(Q_e - \frac{Q_p}{2}\right)^2 + \alpha = Q_e^2 - 2\frac{Q_e Q_p}{2} + \frac{Q_p^2}{4} + \alpha = \left[\quad\right]$$

$$Q_e^2 - Q_e Q_p + \frac{Q_p^2}{4} + \alpha = Q_e^2 - Q_e Q_p + \frac{Q_p^2}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{Q_p^2}{3} - \frac{Q_p^2}{4} = \frac{Q_p^2}{12} = \alpha$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{K}{D^5}L\left[\left(Q_e - \frac{Q_p}{2}\right)^2 + \frac{Q_p^2}{12}\right] =$$ con $Q_p = Q_e - Q_s$

$$\left(Q_e - \frac{Q_e - Q_s}{2}\right)^2 + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{12} = \left(\underbrace{Q_e - \frac{Q_e}{2}}_{Qe/2} + \frac{Q_s}{2}\right)^2 + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{12}$$

$$= \left(\frac{Q_e + Q_s}{2}\right)^2 + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{12} = \frac{(Q_e + Q_s)^2}{4} + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{12} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{K}{D^5}L\left[\frac{(Q_e + Q_s)^2}{4} + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{12}\right]}$$

de otra manera, operando en el paréntesis es:

$$\left[Q_e^2 - Q_e Q_P + Q_P^2/3\right] = \quad \text{con} \quad Q_P = Q_e - Q_s$$

$$Q_e^2 - Q_e(Q_e - Q_s) + \frac{(Q_e - Q_s)^2}{3} =$$

$$\cancel{Q_e^2} - \cancel{Q_e^2} + Q_eQ_s + \frac{Q_e^2 - 2Q_eQ_s + Q_s^2}{3} = \frac{3Q_eQ_s + Q_e^2 - 2Q_eQ_s + Q_s^2}{3}$$

$$= \frac{Q_e^2 + Q_eQ_s + Q_s^2}{3} = \frac{(Q_e+Q_s)^2 - Q_eQ_s}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{K}{D^5} L \left[\frac{(Q_e+Q_s)^2 - Q_eQ_s}{3}\right]} \quad ✓$$

b) $\xrightarrow{Q_E}$ ———————— $\xrightarrow{} Q_s$

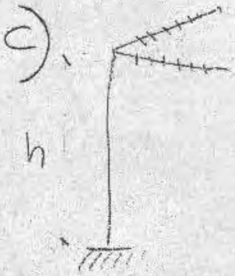
$$\text{si hago } Q_S = 0 \Rightarrow \Delta P = \frac{K}{D^5} L \overbrace{\left[\frac{Q_e^2}{3}\right]}^{\hat{Q}^2_{eq}}$$

$$\text{Digo entonces q' } \cancel{\frac{Q_e}{3} = Q_c} \Rightarrow Q_c^2 = \frac{Q_e^2}{3} \Rightarrow \boxed{Q_c = \frac{Q_e}{\sqrt{3}}}$$

Depende de la def de caudal equivalente.

$$\text{Si propongo } \Delta p = \lambda \frac{L}{D} \tfrac{1}{2} \rho v^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \frac{\hat{Q}^2}{A^2} = \frac{2L\rho}{\pi^2 D^5} \hat{Q}^2 \Rightarrow \hat{Q} = \frac{2Q_e}{\sqrt{3}}$$

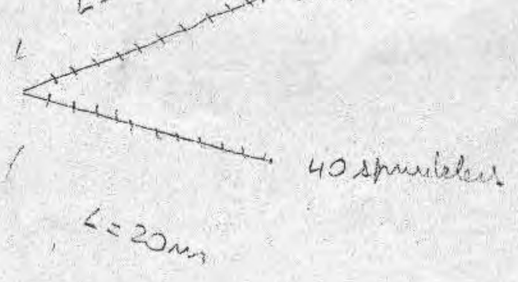
c)



$h = 15$ pisos $=$

el antiincendio está en el techo del piso 15 $\Rightarrow$

$\Rightarrow h = 16 \times 3\,m = \underline{48\,m = h}$



$$Q_{SP} = 1\,l/min = 1{,}66 \cdot 10^{-5}\,m^3/s.$$

$$Q_{rama} = 40 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-5}\,m^3/s = 6{,}66 \cdot 10^{-4}\,m^3/s$$

$$Q_{TOT} = 2 \times Q_{rama} = \boxed{1{,}33 \cdot 10^{-3}\,m^3/s = Q_R}$$

$$\boxed{Q_T = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\,m^3/s}$$

Planteo las caídas de presión:

$$\Delta P_{BBA} = \underbrace{\rho g h}_{\substack{\text{ESTÁ EN} \\ \text{EL PISO 15}}} + \underbrace{\Delta P_f}_{\substack{\text{FRICCIÓN} \\ \text{CAÑO} \\ \text{PPAL}}} + 2\underbrace{\Delta P_{f_{RAMA}}}_{\substack{\text{FRICCIÓN} \\ \text{EN CADA} \\ \text{RAMA}}} + 240\,\Delta P_{SPRINK}$$

en el caño ppal:

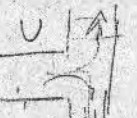
$$\Delta P_f = f \tfrac{1}{2} \rho U^2 L/D \qquad \text{con} \quad Q = U.A \Rightarrow U_T = \frac{Q}{A} = \frac{Q_T}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 Q_T}{\pi D_p^2}$$

$$\Delta P_f = f \frac{1}{2} \rho \frac{16 Q_T^2}{\pi^2 D^4} \cdot \frac{L}{D} = f \frac{1}{2} \rho \frac{16 Q_T^2 L}{\pi^2 D_p^5} = f \frac{8 \rho}{\pi^2} \frac{Q_T^2}{D_p^5} L_p$$

$$\boxed{\Delta P_f = \underbrace{f \frac{8 \rho}{\pi^2}}_{K_1} \frac{L_p}{D_p^5} . Q_T^2}$$

en cada rama:

$$\Delta P_{f_{rama}} = f \tfrac{1}{2} \rho U_R^2 L_R/D_R \qquad \text{con} \quad Q_R = U_R . A_R \Rightarrow U_R = \frac{Q_R}{A_R}$$



considero p'al inicio de la bifurcación la vel. del fluido se mantiene (es la misma velocidad)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} U = \dfrac{Q_T}{A_T} \\ U = \dfrac{Q_R}{A_R} \\ Q_R = Q_T/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{Q_T}{A_T} = \frac{Q_R}{A_R} \Rightarrow \frac{Q_T}{A_T} = \frac{Q_T}{2 A_R}$$

$$1 = \frac{A_T}{2 A_R} \Rightarrow A_R = \tfrac{1}{2} A_T$$

$$\Delta P_{f_{rama}} = f \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q_R}{A_R}\right)^2 . L_R/D_R \qquad \text{con} \quad U_R = \frac{Q_R}{A_R} = \frac{Q_R 4}{\pi D_R^2}$$

$$\Delta P_{f_{rama}} = f \frac{1}{2} \rho \frac{16 Q_R^2}{\pi^2 D_R^4} \frac{L_R}{D_R} = \boxed{\underbrace{\frac{8 f \rho}{\pi^2}}_{K_2} \frac{Q_R^2}{D_R^5} . L_R = \Delta P_{f_{rama}}}$$

la presión de la bomba es: $(2Q_R)^2 = 4Q_R^2$ $\quad Q_T/2$

$$\boxed{\Delta P_{BBA} = \rho \cdot g \cdot 48m + K_1 \frac{L_P}{D_P^5} \cdot Q_T^2 + 2\, K_2 \frac{Q_R^2}{D_R^5} L_R + 40 \cdot 1000\ Pa =}$$

d) $\dfrac{\Delta P_{BBA}}{Q_T} = cte$

Como hay:  $\Rightarrow$ no son 2 ramales sino 1,5 ramales

va a haber 30 sprinklers en lugar de 40.

$$\boxed{cte = \frac{\Delta P_{BBA}}{Q_T} = \frac{\rho g h}{Q_T} + K_1 \frac{L_P}{D_P^5} \cdot Q_T + 1{,}5\, K_2 \frac{Q_T}{4 D_R^5} \cdot L_R + \frac{30 \cdot 1000\ Pa}{Q_T} =}$$

De esta ecuación despejo el nuevo Q_T

El nuevo caudal de c/sprinkler es: $\boxed{Q_S = Q_T/30}$

Final 7/2/06

hoja 1 de 2

1

1 Punto Pràctico (duraciòn 1h45min)

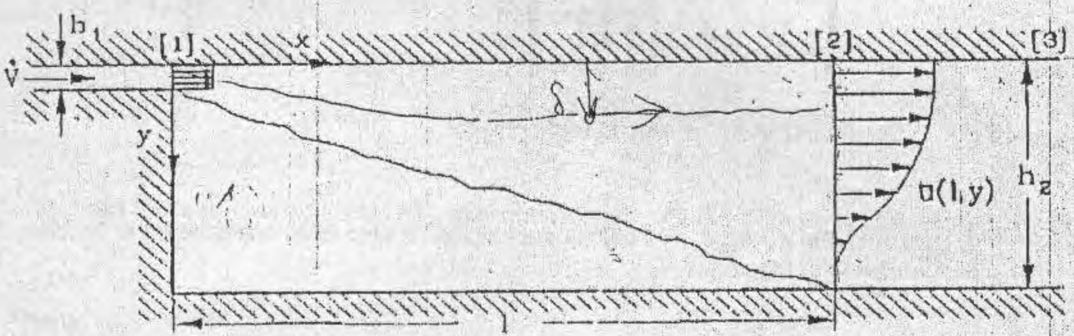
Un fluido fluye con un caudal Q y densidad constante ρ, a través de un canal plano cuya altura en la sección (1) cambia abruptamente de h1 a h2 .
La velocidad en la sección (1) es uniforme.
En el punto donde se produce el cambio abrupto de sección se produce separación del fluido, hasta que en la posición x=L el fluido esta totalmente readherido a la pared.

El perfil de velocidades entre la sección (1) y (2) esta dado por :

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{K}{x}} \cdot e^{-\frac{y}{x} a}$$

con la constante a adoptando un valor de

$$a = 10.0$$



Asumimos que en la pared superior del canal no ocurre separación del fluido y además consideramos que para cada posición del eje x dentro del canal la presión se mantiene constante en toda la sección
Se pide

a)Calcular la velocidad del fluido en la sección (1) y dar la distribución de velocidades en (2), u(L,y)
(NOTA 1: no considerar a K como dato).

b)Determinar la diferencia de presión $\Delta p = p2 - p1$ entre la sección (1) y la (2), despreciando la fricción.

c)Considerando ahora la fricción en la pared superior (para y=0), donde desde la sección (1) se desarrolla una capa limite de espesor δ, calcular nuevamente el Δp entre las secciones (1) y (2) y comparando con el resultado de la parte b), calcular la fuerza en la pared superior.

Resollver Considerando que al aplicar el método integral para la capa limite tendremos la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d}{dx}\delta_2 + \frac{1}{u(x,\delta)}\cdot\left(\frac{d}{dx}u(x,\delta)\right)\cdot(2\cdot\delta_2+\delta_1) = \frac{\tau_W}{\rho\cdot u(x,\delta)^2}$$

$|\delta'\ \delta|$

Donde

$$\delta_2(x) = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u_0}{u(x,\delta)}\right)\cdot\frac{u_0}{u(x,\delta)}\,dy$$

$\int_0^{\delta}\left(1 - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)dy$

$$\delta_1(x) = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u_0}{u(x,\delta)}\right)dy$$

Donde la velocidad u_0 dentro de la capa límite δ (x) sigue la siguiente ley

$$u_0 = u(x,\delta)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{\delta}\right)$$

$\tau_w = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = f(\delta)$

NOTA 2: Considerar que δ es mucho menor que x.

d) Determinar el Δp = p2 -p1 , bajo la suposición de velocidad uniforme en la sección (2) y despreciando la fricción.

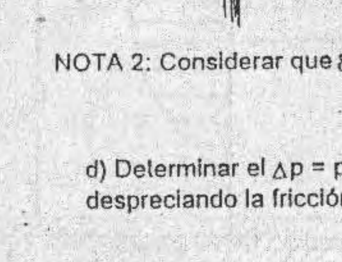
2)El factor de fricción (λ) para un flujo turbulento dentro de un conducto circular (desarrollado para un número de Reynolds dentro del rango $5000 < Re < 10^5$) puede ser calculado utilizando la expresión de Blasius: $\lambda = 0{,}316.Re^{-1/4}$
La distribución de velocidades dentro del conducto de radio R, tiene la forma de:

$u(r) = C(R-r)^m$

Se pide:

a) Calcular la velocidad media del flujo ($\bar{U}$) empleando la distribución de velocidades arriba presentada.
b) Calcular la tensión de corte en la pared del conducto (τ_w).

$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_T}$



A_T

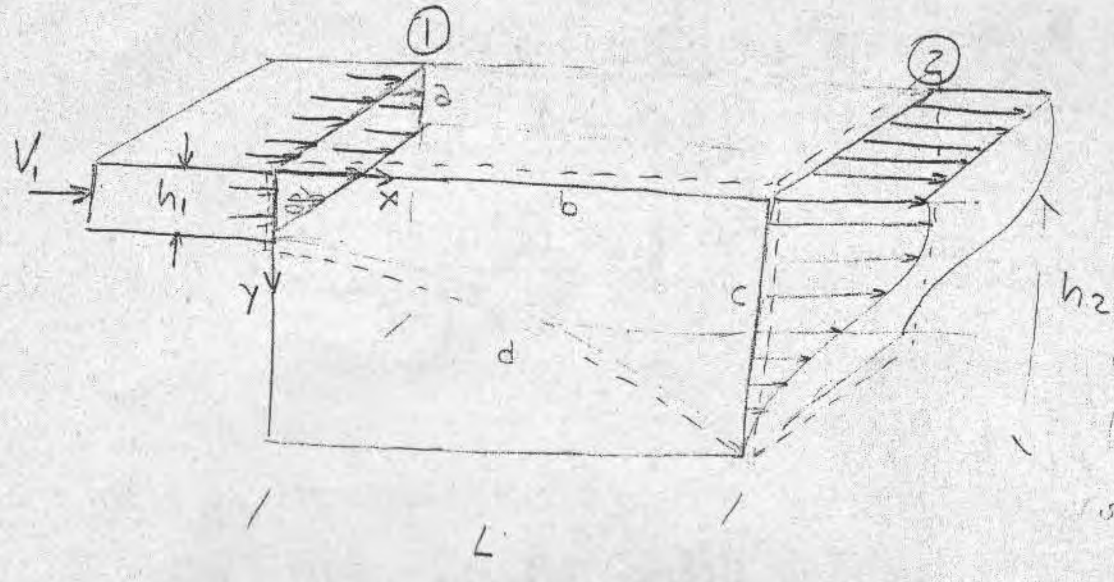
$C_D = f(Re)$

$\Delta P A_T = \tau_w A$

$F_p \quad F_f$

$\lambda \phi = \frac{\Delta P\ \phi}{\frac{1}{2}\rho(\bar{U})^2 L}$

EJERCICIO DE COLOQUIO ①



$$u(x,y) = \sqrt{\frac{k}{x}}\, e^{-\frac{y}{x} a}$$

con $a = 10$

a) En ①: $Q = V_1 A_1 = V_1 \cdot h_1 \cdot b \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q}{h_1 b}}$

En ②: Planteo conservación de la masa:

$$\iiint_{V_t} \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\, dV + \iint_s \rho \bar{u} \cdot \bar{n}\, dS = \dot{m}$$

$\dot{m} = 0$ ya q' no hay masa entrante o saliente.

$$\iint_s \rho \bar{u} \cdot n\, dS = 0$$

lo planteo para la cara a) y c) q' lo atraviesan líneas de corriente:

$$\underbrace{-\int_0^{h_1}\int_0^{b} \rho \overset{cte}{\frac{Q}{h_1 b}}\, dy\, dz}_{\text{SUP } ⓐ} + \underbrace{\int_0^{h_2}\int_0^{b} \rho \sqrt{k/x}\, e^{-y/x\, a}\, dy\, dz}_{\text{SUP } ⓒ} = 0$$

$$= \underbrace{-\rho \frac{Q}{h_1 b} \cdot h_1 \cdot b}_{} + \rho \sqrt{k/x} \int_0^{h_2}\int_0^{b} e^{-\frac{a}{x} y}\, dy\, dz = 0$$

$$-\rho Q + \rho \sqrt{\frac{k}{x}}\, b \underbrace{\int_0^{h_2} e^{-\frac{a}{x} y}\, dy}_{} = 0$$

$$-\frac{x}{a} e^{-\frac{a}{x} y}\Big|_0^{h_2} = -\frac{x}{a}\left[e^{-\frac{a}{x} h_2} - 1\right] = \frac{x}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{x} h_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\rho Q + \rho \sqrt{\frac{k}{x}}\, b \cdot \frac{x}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{x} h_2}\right) = 0$$

$$Q = \sqrt{\frac{k}{x}}\, b \cdot \frac{x}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{x}h_2}\right)$$

despejando k es: $$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}} = \frac{Q\,a}{b \cdot x\left(1-e^{-a/x\,h_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} = \frac{Q \cdot a\sqrt{x}}{b \cdot x\left(1-e^{-a/x\,h_2}\right)} \Rightarrow k = \frac{Q^2 a^2 \cancel{x}}{b^2 x^2\left(1-e^{-a/x\,h_2}\right)^2}$$

$$\boxed{k = \frac{Q^2 a^2}{b^2 x\left(1-e^{-a/x\,h_2}\right)^2}}$$

si reemplazo en la $U(x,y)$ y la calculo para $U(L,y)$ tengo la distribución de velocidades en L.

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{Q^2 a^2}{b^2 x\left(1-e^{-a/x\,h_2}\right)^2 x}} \cdot e^{-\frac{y}{x}a} =$$

$$\boxed{u(x,y)\Big|_{(L,y)} = \frac{Q\,a}{b \cdot l\left(1-e^{-a/l\,h_2}\right)} \cdot e^{-\frac{y}{l}a}} = u(l,y)$$

b) Planteo conservación de la cant. mov.:

$$\iiint_{V(t)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{u})}_{=0} dV + \oint_{S(t)} \rho\bar{u}(\bar{u}\cdot\bar{n})\, dS = \iiint_{V(t)} \underbrace{\rho F_{VOL}}_{\to 0}\, dV + \iint_{S(t)} \bar{\bar{T}}\, dS$$

es estacionario

se desprecian fzas volumen

$$\Rightarrow \oint_S \rho\bar{u}(\bar{u}\cdot\bar{n})\, dS = \iint_S \bar{T}\, dS$$

con $\bar{T} = \bar{\sigma}\cdot\bar{n}$ en este caso: $T = \Delta P = P_{1-2}$

sup PC

sup 2

$$-\rho U_1^2 \iint dS + \rho\iint u_2\, dS = \Delta P_{12} \cdot A_2$$

$$-\rho U_1^2 \int_0^{h_1}\int_0^b dx\,dy + \rho\iint u_{(l,y)}\, dx\,dy = \Delta P \cdot A_2$$

Area $\bar{T}$ total fluido $= P_1(h_1 \cdot h_2)$

$A_1 = P_1 h_1$

$A_2 = -P_2 h_2$

$$-\rho U_1^2 h_1 b + \rho \int_0^{h_2}\int_0^{b} \frac{Q\,a}{b\,\ell\left(1-e^{-a/\ell h_2}\right)} \cdot e^{-y/2\,a}\, dx\, dy = \Delta P_{12} \cdot A_2 \;?$$

c) $\oiint_S \rho \bar{u}(\bar{u}.\bar{n})\, dS = \iint_S \bar{T}\, dS$

pero en este caso es:

$$\iint_S \bar{T}\, dS = \Delta P_{12} \cdot A_2 + b\int_0^{\ell} \tau_w(x)\, dx$$

siendo $\tau_w(x) = -\mu \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=0}$

Como es $u_0 = u(x,\delta) . \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{y}{\delta}\right)$ lo reemplazo en $\delta_1(x)$ y $\delta_2(x)$

$$\delta_1(x) = \int_0^{\delta}\left[1 - \frac{\cancel{u(x,\delta)}\operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta)}{\cancel{u(x,\delta)}}\right] dy = \boxed{\int_0^{\delta}\left[1 - \operatorname{sen} \pi/2\; y/\delta\right] dy = \delta_1(x)}$$

$$\delta_2(x) = \int_0^{\delta}\left[1 - \frac{\cancel{u(x,\delta)}\operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta)}{\cancel{u(x,\delta)}}\right] \cdot \frac{\cancel{u(x,\delta)} . \operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta)}{\cancel{u(x,\delta)}}\, dy =$$

$$\delta_2(x) = \int_0^{\delta}\left[1 - \operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta)\right] . \operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta)\, dy =$$

$$\delta_2(x) = \int_0^{\delta}\left[\operatorname{sen}(\pi/2\; y/\delta) - \operatorname{sen}^2(\pi/2\; y/\delta)\right] dy =$$

$$\delta_2(x) = \int_0^{\delta} \operatorname{sen}(\pi/2\delta\; y)\, dy - \int_0^{\delta} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2\delta}y\right) dy =$$

$$= -\frac{2\delta}{\pi}\cos\frac{\pi}{2\delta}y\,\Big|_0^{\delta} - \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\frac{2\delta}{\pi}\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2\delta}y\right)\right]\Big|_0^{\delta} =$$

$$= \left[-\frac{2\delta}{\pi}\cos(\pi/2) - \frac{2\delta}{\pi}\right] - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\pi}\operatorname{sen}2\pi/2 + \frac{1}{4}\frac{2\delta}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2\delta}0 =$$

$$+\,2\delta \qquad = +\frac{2\delta}{\pi} - \frac{1}{2}\delta + \cancel{\ldots} = \delta\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2\pi}}\right)$$

$$\delta_2(x) = \delta\left(\tfrac{-5}{2\pi} - \tfrac{1}{2}\right) = \boxed{+\delta\left(\tfrac{5}{2\pi} - \tfrac{1}{2}\right) = \delta_2(x)}$$

integrando $\delta_1(x)$ es:

$$\delta_1(x) = \int_0^{\delta} \left[1 - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\, y/\delta\right)\right] dy = y\Big|_0^{\delta} - \underbrace{\left(-\frac{2\delta}{\pi}\cos\frac{\pi}{2\delta}y\right)}\Big|_0^{\delta} =$$

$$= \left[\delta - 0\right] + \frac{2\delta}{\pi}\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} - \frac{2\delta}{\pi}\underbrace{\cos 0}_{1} = \delta - \frac{2\delta}{\pi} = \boxed{\delta\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \delta_1(x)}$$

d) si es vel. uniforme en (2) y despreciando la fricción es:

Planteo conservación de la masa:

$$\underbrace{\iiint_V \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{\text{estacionario}} dV + \oiint_S \rho(\bar{u}.\bar{n})\, dS = \dot{m}$$

$$\oiint_S \rho(\bar{u}.\bar{n})\, dS = 0 \Rightarrow -\cancel{\rho} U_1 A_1 + \cancel{\rho} U_2 A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{U_1 A_1 = U_2 A_2}$$

en (1) con $U_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{b h_1}$

en (2) $U_2 = U(l,y) = \sqrt{\frac{k}{l}} \cdot e^{-y/l a}$ } considero a $\underline{y = cte}$

reemplazando es:

$$U_1 . \cancel{b} . h_1 = \sqrt{\frac{k}{l}} \cdot e^{-y/l a} . \cancel{b} . h_2 \Rightarrow \frac{U_1 h_1}{h_2 e^{-y/l a}} = \sqrt{\frac{k}{l}}$$

$$\left(\frac{U_1 h_1}{h_2 e^{-y/l a}}\right)^2 = \frac{k}{l} \Rightarrow \boxed{k = l \left(\frac{U_1 h_1}{h_2 e^{-y/l a}}\right)^2}$$

reemplazando en la expresión de la velocidad es:

$$u(l,y) = \sqrt{\frac{\cancel{l}\left(U_1 h_1 / h_2 e^{-y/l a}\right)^2}{\cancel{l}}} \cdot e^{-y/l a} = \frac{U_1 h_1}{h_2 e^{-y/l a}} \cdot e^{-y/l a} = \frac{U_1 h_1}{h_2}$$

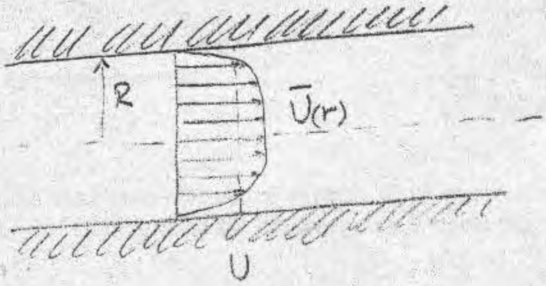
$$\boxed{u(l,y) = \frac{U_1 h_1}{h_2}}$$ Para $\underline{y = cte}$

la caída de presión la calculo planteando cons. cant. mov.

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u})\, dV + \oiint_S \rho \bar{u}(\bar{u}.\bar{n})\, dS = \iiint \rho F_{vol}\, dV$$

DE FEUDIS, RUBEN

EJERCICIO:



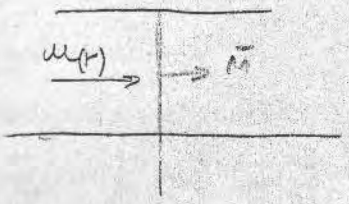
$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-1/4}$

λ = factor de fricción.

$u(r) = C(R-r)^m$

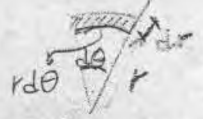
a) Calcular la vel. media: $U = Q.A$ con U = vel. media

siendo el caudal: $\boxed{Q = \iint_S \bar{v}.\bar{n}\, ds}$



$$Q = \iint_S \bar{v}.\bar{n}\, ds = \iint_S C(R-r)^m\, ds =$$

$$Q = \int_0^r \int_0^\theta C(R-r)^m \, \underset{\sim}{r d\theta} dr =$$



$$Q = C \int_0^R \int_0^{2\pi} (R-r)^m r \, dr\, d\theta = 2\pi C \int_0^R (R-r)^m r\, dr =$$

la integral indefinida es

$$\int_0^R (R-r)^m r\, dr = \frac{1}{m+2}(R-r)^{m+2} - \frac{R}{m+1}(R-r)^{m+1} + cte$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi C \left[\frac{1}{m+2}(R-r)^{m+2} - \frac{R}{m+1}(R-r)^{m+1} \right]\Bigg|_0^R = 2\pi C \left(\frac{1}{m+2} R^{m+2} - \frac{R}{m+1} R^{m+1} \right) =$$

$$Q = 2\pi C \left(\frac{R^{m+2}}{m+2} - \frac{R^{m+2}}{m+1} \right) = 2\pi C R^{m+2} \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} \right) =$$

la vel media es: $U = Q.A \Rightarrow$

$$U = \frac{2\cancel{\pi} C R^{m+\cancel{2}} \left(1/m+2 - 1/m+1 \right)}{\cancel{\pi} \cancel{R^2}} = 2 C R^m (1/m+2 - 1/m+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{U = 2R^m C \left(1/m+2 - 1/m+1 \right)}$$

vel. media

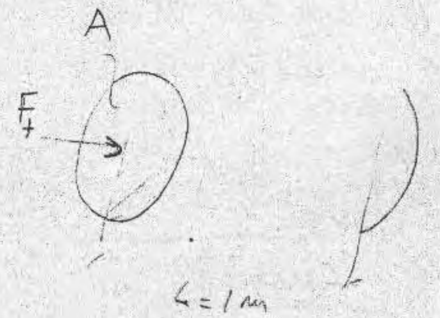
b) Vel. medio

$$Re = \frac{V.L}{\nu} = \frac{2RC\left(1/_{m+2} - 1/_{m+1}\right).D}{\nu} = \boxed{\frac{cD^2\left(1/_{m+2} - 1/_{m+1}\right)}{\nu}}$$

Con el Re calculo el λ:

$$\lambda = 0{,}316 . Re^{-1/4}$$

siendo: $\Delta P = \lambda \, 1/2 \, \rho U^2 L/D$



Fza Fricción

$$F_f = \Delta P . A$$

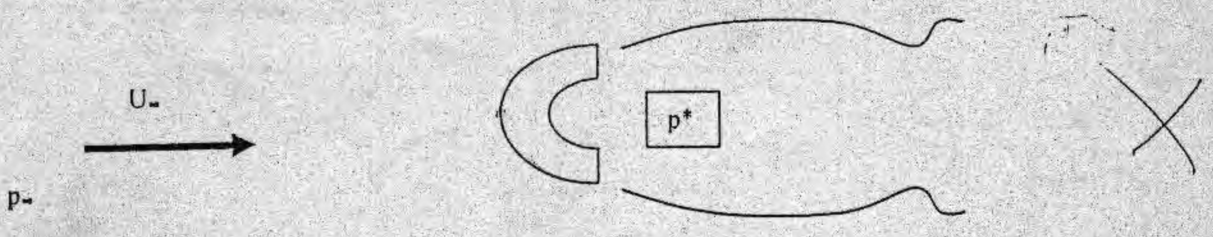
siendo $F_f = \tau . A_M$ área mojada

$$\Rightarrow F_f = \Delta P . A = \tau A_M \Rightarrow \Delta P . \pi R^2 = \tau \, 2\pi R L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \, 1/2 \, \rho U^2 . \frac{\cancel{L}}{\cancel{D}} . \cancel{\pi} \frac{D^{\cancel{2}}}{4} = \tau \, 2\cancel{\pi} \frac{\cancel{D}}{\cancel{2}} \cancel{L}$$

$$\lambda \, 1/8 \, \rho U^2 = \tau \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\lambda \rho U^2}{8}}$$

1



La mitad de una cáscara de cilindro (radio R) es expuesta a un flujo uniforme, plano e incompresible. Las fuerzas de volumen pueden ser despreciadas. Delante del cuerpo el flujo puede ser considerado potencial con

$$\phi(r,\theta)=U_\infty \cos\theta\left(r+\frac{R^2}{r}\right)$$

$U_r = \frac{d\phi}{dr}$

$U_\theta = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{d\theta}$

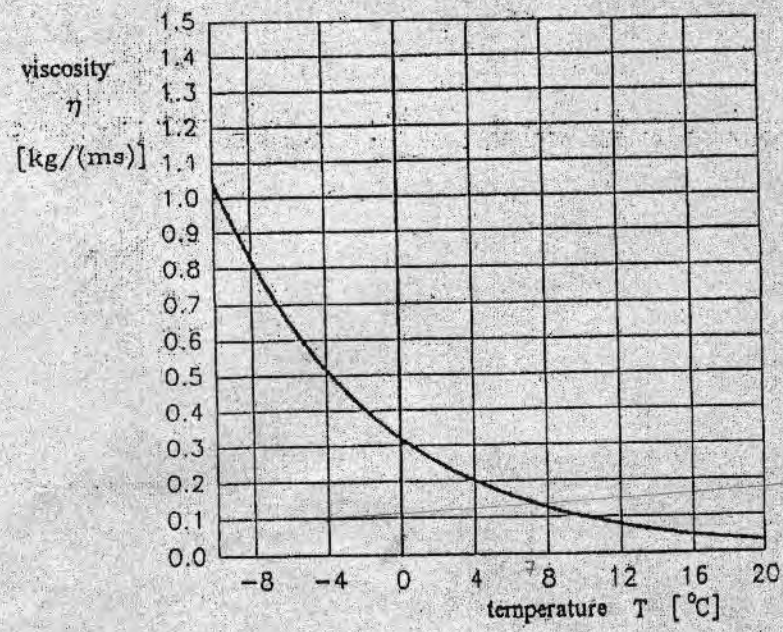
El flujo se separa en los bordes de la cáscara y una región de estancamiento se forma en la parte posterior donde la velocidad es prácticamente nula y la presión p=p*=cte. En la zona muy alejada del cilindro la velocidad es U∞ y la presión p∞.De acuerdo a los experimentos el valor del coeficiente de arrastre Cd es igual a 1.2

$$C_d=\frac{F_x}{\rho U_\infty^2 R}$$

a) Dar la expresión del campo de velocidades en la parte frontal del cilindro
b) Probar que el flujo es irrotacional $\rightarrow div\, U = 0$
c) Hallar la distribución de presiones en la superficie del cilindro considerando Bernoulli
d) Hallar la presión en el punto de estancamiento $\rightarrow U = 0$
e) Estimar la fuerza de arrastre de presión asumiendo que p*=p(R,Π/2). Cuanto vale el coeficiente de arrastre considerando este único término.
f) A partir de los datos experimentales cuanto valen las fuerzas de arrastre por fricción.
g) Como debería hacerse para computarse las fuerzas de fricción si no se dispusiese de datos experimentales.

Ejercicio2: Flujo de petroleo en un conducto

A muy bajas T, el petróleo crudo puede ser transportado a través de cañerías a una caída de presión aceptable sólo porque el calor generado por la disipación causa una caída de viscosidad. Considerando flujo laminar, incompresible, con temperatura uniforme a través de la sección, con propiedades constantes en la dirección axial (temperatura, velocidad media, diámetro) La pérdida de calor al exterior por unidad de longitud puede aproximarse con Q=k(T-Ta)2πR,donde T es la temperatura media del petróleo, Ta la temperatura ambiente y k el coeficiente de conductividad térmica de un aislante sobre el caño. Siendo $\bar{U}$ = 3 m/s, D= 0,5 m, Ta=-40°C, k=0,8 W/m²K



a) Hallar $u_z(r)$.
b) Determinar la función disipación Φ.
c) Hallar la energía disipada por unidad de longitud y tiempo como una función de μ.
d) Considerando que la energía de disipación se transfiere al exterior, hallar una relación entre la viscosidad y la temperatura de trabajo del fluido.
e) Calcular el gradiente de presión $\frac{\partial p}{\partial z}$.

Ejercicio 2: Flujo alrededor de una placa plana

El flujo potencial alrededor de una delgada placa plana puede ser descripto por la expresión

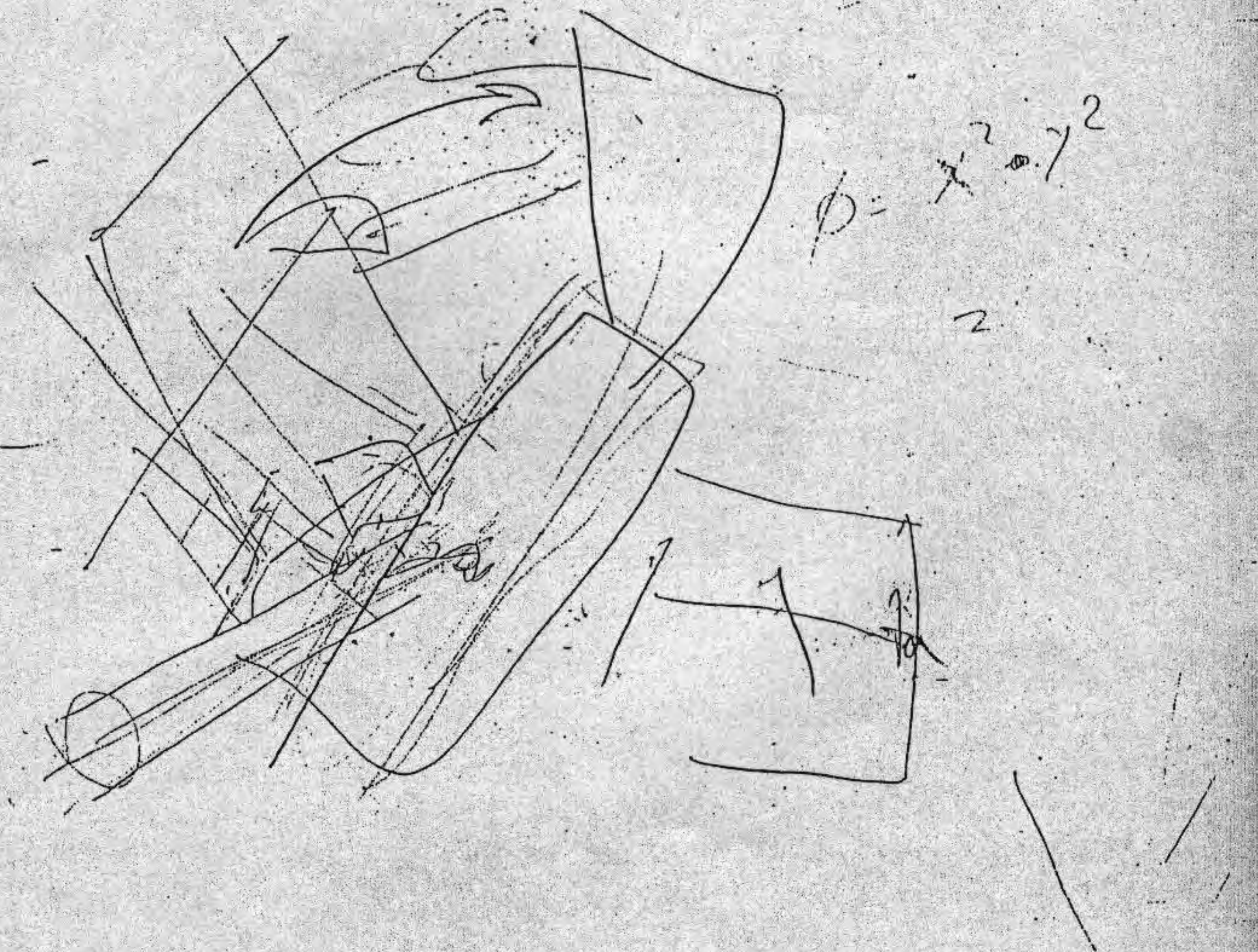
$$F(z) = \frac{a}{n} z^n$$

considerando $n=1/2$
$(z=x+iy)$.

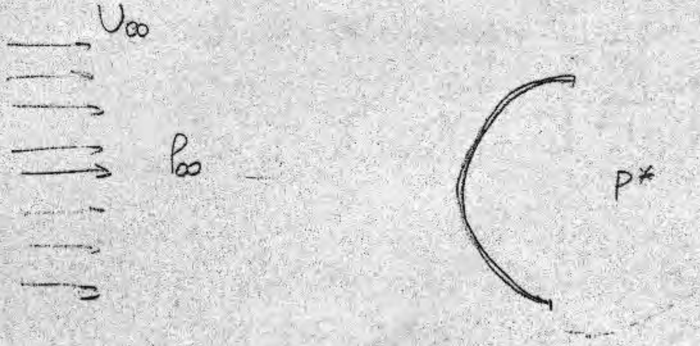
a) Determinar la función corriente
b) Determinar la distribución de la presión en el espacio.
c) Utilizando el teorema de Blasius expresar la integral que permite determinar la fuerza actuando según la coordenada x y según la coordenada y.

Ejercicio 3: Determinación de la fuerza de sustentación de un perfil alar

Un perfil alar puede pivotar alrededor de un eje en el espacio. Al giro del eje se opone un resorte de torsión con una fuerza que es proporcional al ángulo girado. El eje puede disponerse en distintas posiciones sobre la cuerda del perfil. Indique precisamente como haría con estos elementos para determinar la fuerza de sustentación con un túnel de viento del cual conoce la velocidad de la corriente para distintas condiciones de operación (el túnel no posee una balanza de fuerzas).
Nota: Se conoce la constante de proporcionalidad entre la fuerza y el ángulo de giro del perfil.



EJERCICIO 1



$$C_d = \frac{F_x}{\rho U_\infty^2 R}$$

$$\phi(r,\theta) = U_\infty \cos\theta \left[r + \frac{R^2}{r} \right]$$

a) El campo de velocidades es:

$$\nabla\phi = \bar{U} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{en polares es:} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi}{\partial r} = V_r \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\cdot\dfrac{1}{r} = V_\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_r = \dfrac{\partial\phi}{\partial r} = U_\infty \cos\theta \left[1 - \dfrac{R^2}{r^2} \right] \\ V_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\phi}{\partial\theta} = -\dfrac{U_\infty}{r} \operatorname{sen}\theta \left[r + \dfrac{R^2}{r} \right] = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 + \dfrac{R^2}{r^2} \right) = V_\theta \end{array} \right.$$

$$\boxed{V_{(r,\theta)} = \left[U_\infty \cos\theta \left(1 - R^2/r^2 \right) \right] \bar{e}_r + \left(-U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 + R^2/r^2 \right) \right) \bar{e}_\theta}$$

✓

b) Debo probar que el flujo es irrotacional.

$$\text{El operador es:} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial r}\bar{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\bar{e}_\theta + \dfrac{\partial}{\partial z}\bar{e}_z \\ U_{(r,\theta)} = V_r \bar{e}_r + V_\theta \bar{e}_\theta \end{array} \right.$$

rotor

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{U} = 0}$$

el rotor en coordenadas cilíndricas es:

$$\operatorname{rot}\bar{U} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right]\bar{e}_r + \left[\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right]\bar{e}_\theta + \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\theta} \right]\bar{e}_z$$

$$\operatorname{rot}\bar{U}_{(r,\theta)} = \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\theta} \right]\bar{e}_z$$

siendo $\begin{cases} \dfrac{\partial U_\theta}{\partial r} = 2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \dfrac{R^2}{r^3} \\ \dfrac{\partial U_r}{\partial \theta} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left[1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right] \end{cases}$

reemplazando es:

$$\operatorname{rot} \bar{U}_{(r,\theta)} = 2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3} - \frac{U_\infty}{r} \operatorname{sen}\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{1}{r} U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) =$$

$$= 2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3} - U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(\frac{1}{r} + \frac{R^2}{r^3}\right) + U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(\frac{1}{r} - \frac{R^2}{r^3}\right) =$$

$$= \underbrace{2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3}} - \cancel{U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{1}{r}} \underbrace{- U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3}} + \cancel{U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{1}{r}} \underbrace{- U_\infty \operatorname{sen}\theta R^2/r^3}$$

$$= 2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3} - 2 U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{r^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \bar{U}_{(r,\theta)} = 0}$$ el flujo es irrotacional

c) Planteo Bernoulli entre el ∞ y la superficie:

$$1/2\, \rho U_\infty^2 + \cancel{\rho g h_\infty} + P_\infty = 1/2\, \rho U_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + P_1$$

$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} + P_\infty = \frac{1}{2} \rho U_1^2 + P_1$$

$$P_1 = \frac{\rho U_\infty^2}{2} - \frac{\rho U_1^2}{2} + P_\infty = \frac{1}{2} \rho \left(U_\infty^2 - U_1^2\right) + P_\infty$$

siendo: $U_1^2 = U_r^2 + U_\theta^2 =$

$$U_1^2 = U_\infty^2 \cos^2\theta \left(1 - R^2/r^2\right)^2 + U_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(1 + R^2/r^2\right)^2 =$$

$$U_1^2 = U_\infty^2 \left[\cos^2\theta \left(1 - R^2/r^2\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \left(1 + R^2/r^2\right)^2\right] =$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \rho \left[U_\infty^2 - U_\infty^2 \left[\cos^2\theta \left(1 - R^2/r^2\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \left(1 + R^2/r^2\right)^2\right]\right] + P_\infty$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[1 - \left[\cos^2\theta \left(1 - R^2/r^2\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \left(1 + R^2/r^2\right)^2\right]\right] + P_\infty}$$

d) en el pto de estancamiento es: $U=0$

en Bernoulli hago $U_1 = 0$

$$P_1 = 1/2\, \rho\left(U_\infty^2 - \cancelto{0}{U_1^2}\right) + P_\infty \Rightarrow \boxed{P_1 = 1/2\, \rho\, U_\infty^2 + P_\infty}$$

En el pto de estancamiento es: $U = 0 \Rightarrow U_r = 0$
$U_\theta = 0$

Para q' $U_r = 0$ debe ser: $\Rightarrow \cos\theta\left(1 - R^2/r^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = R \\ \theta = \pi/2 + m\pi \end{cases}$

Para q' $U_\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta\left(1 + R^2/r^2\right) = 0 \rightarrow \theta = m\pi$

reemplazando esto en la expresión de la presión llegamos a lo mismo

e) la diferencia de presiones delante y detrás de la cáscara es:

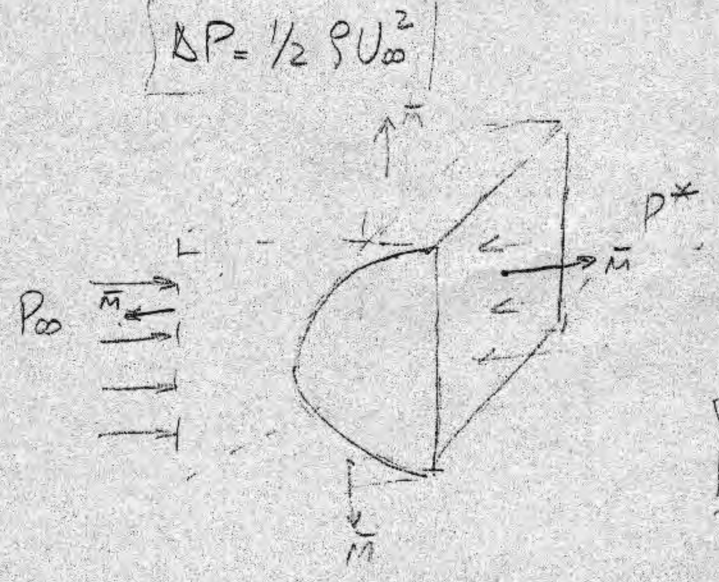
$$\Delta P = P_\infty - P^*$$

con
$$\begin{cases} P_1 = 1/2\, \rho U_\infty^2\left[1 - \cos^2\theta\left(1 - R^2/r^2\right)^2 - \operatorname{sen}^2\theta\left(1 + R^2/r^2\right)^2\right] + P_\infty \\ P^* = P(R, \pi/2) = 1/2\, \rho U_\infty^2\left(1 - 4\right) + P_\infty = -3/2\, \rho U_\infty^2 + P_\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta P = P_\infty - P^* =$

$$\Delta P = P_\infty - \left(-1/2\, \rho U_\infty^2 + P_\infty\right) = \cancel{P_\infty} + 1/2\, \rho U_\infty^2 - \cancel{P_\infty} = 1/2\, \rho U_\infty^2$$

$$\boxed{\Delta P = 1/2\, \rho U_\infty^2}$$



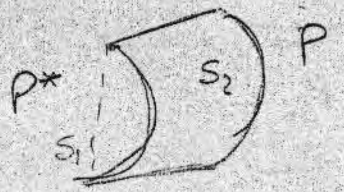
$$\int \bar{\bar{T}}\, ds = \bar{F}$$

en los casos horiz se anulan entre sí

$$F_1 = -P_\infty . S - \left(-P^* S\right) = -P_\infty S + P^* . S$$

$$\boxed{F = \left(P^* - P_\infty\right) . S}$$

de otra manera: $d\bar{F} = p\,ds \Rightarrow \bar{F} = \iint_S \bar{p}\,ds$



$$F = \iint_{S_1} p^* ds + \iint_{S_2} p\,ds =$$

$$F = p^* \cdot \frac{2R}{b} - \int_0^R \int_0^\theta p_1 \; r\,dr\,d\theta =$$

con $p_1 = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[1 - \cos^2\theta (1 - R^2/r^2)^2 - \operatorname{sen}^2\theta (1 + R^2/r^2)^2 \right] + P_\infty \Big|_{r=R}$

$$\boxed{p_1 = 1/2\, \rho U_\infty^2 \left[1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\right] + P_\infty}$$

$$\boxed{F = p^* \cdot \frac{2R}{b} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1/2\, \rho U_\infty^2 \left[1 - 2\operatorname{sen}^2\theta + P_\infty\right) R\,d\theta\right.}$$

siendo $C_d = \dfrac{F_x}{\rho U_\infty^2 R}$ con $F_x = F_{FRICCIÓN} + F_{PRESIÓN}$

reemplazo $F_{PRESIÓN}$ en la expresión de C_d: $\Rightarrow \boxed{C_d = \dfrac{F_{PRES}}{\rho U_\infty^2 R}}$

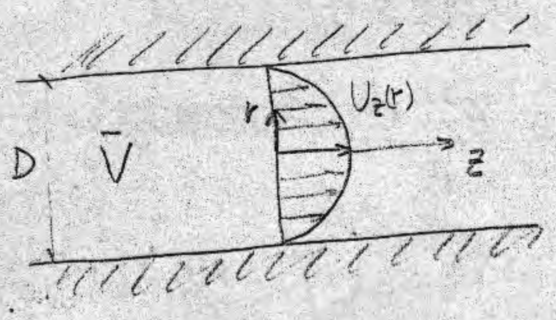
f) $C_d = 1,2$ (experimental)

$$C_d = \frac{F_P + F_{fricc}}{\rho U_\infty^2 R} = 1,2 \Rightarrow F_{fricc} = C_d \cdot \rho U_\infty^2 R - F_P$$

$$\boxed{F_{fricc} = 1,2\; \rho U_\infty^2 R - F_P}$$

g)

EJERCICIO N°2:



$U = 3\,m/s \rightarrow$ Vel. media

$D = 0{,}5\,m$

$T_a = -40°C$

$\begin{cases} k = 0{,}8\,W/m^2\,°K \\ Q = k(T - T_A)\,2\pi R \end{cases}$

la expresión final de la velocidad es:

$$\boxed{U_z(r) = \frac{K\,(R^2 - r^2)}{4\mu}} \quad (I) \quad \text{con} \quad K = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta P = f\,\tfrac{1}{2}\,\rho U^2 L/D \\ \text{Como es laminar: } f = 64/Re \end{array}\right\} \quad \Delta P = \frac{64}{Re}\,\frac{1}{2}\,\rho U^2 L/D =$$

$$\Delta P = \frac{32}{Re}\,\rho U^2 L/D$$

$$\text{Como es } Re = \frac{V.D}{\nu} \Rightarrow \Delta P = \frac{32}{\frac{V.D}{\nu}}\,\rho U^2 L/D = \frac{32}{\frac{\cancel{V}.D\,\rho}{\mu}}\,\rho U^2 L/D =$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\Delta P = \frac{32\,\mu\,U\,L}{D^2}$$

$$\text{Puedo expresar: } \boxed{\frac{\Delta P}{L} \cong \frac{dP}{dz} = \frac{32\,\mu\,U}{D^2}} = K$$

reemplazando en (I):

$$U_{z,(r)} = \frac{\overset{8}{\cancel{32}}\,\cancel{\mu}\,U}{D^2}\,\frac{(R^2 - r^2)}{\cancel{4}\cancel{\mu}} = \frac{8\,U(R^2 - r^2)}{(2R)^2} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\,U(R^2 - r^2)}{\cancel{4}R^2} =$$

$$\boxed{U_z(r) = 2U\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

de otra manera es:

en $\underline{r=0}$ es $\bar{U}_z(r) = \bar{U}_{máx}$ con $\bar{U}_{máx} = 2\bar{U}$

$$U_z(r=0) = \frac{K(R^2-0)}{4\mu} = 2U \Rightarrow K = \frac{8\mu U}{R^2} \quad \text{reemplazo en } (I)$$

$$U_z(r) = \frac{\cancel{8}^{2}\cancel{\mu} U}{R^2}\frac{(R^2-r^2)}{\cancel{4\mu}} = \frac{2U}{R^2}(R^2-r^2) = \boxed{2U(1-r^2/R^2) = U_z(r)}$$

b) la función disipación es

$$\boxed{\bar{\Phi} = 2\mu \bar{\bar{E}} : \bar{\bar{E}}} \qquad \text{con } \bar{\bar{E}}_{ij} = 1/2\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

siendo $\Phi = \Phi(r,\theta,z)$ pero para flujo laminar es:

$$\boxed{\Phi = \Phi(r)} \Rightarrow \bar{\bar{E}} = \frac{dU}{dr} \quad \Rightarrow \text{reemplazando es:}$$

$$\bar{\Phi} = 2\mu(\bar{\bar{E}})^2 = 2\mu\left(\frac{dU}{dr}\right)^2 =$$

$$\text{con } \frac{dU}{dr} = \frac{d(2U - 2Ur^2/R^2)}{dr} = -\frac{2U2r}{R^2} = -\frac{4Ur}{R^2}$$

$$\Rightarrow \Phi = 2\mu \cdot \left(-\frac{4Ur}{R^2}\right)^2 = 2\mu \frac{16U^2r^2}{R^4} = \boxed{\frac{32\mu U^2 r^2}{R^4} = \Phi}$$

c) la energía disipada es:

$$E_d = \iiint_V \Phi \, dV =$$

$$E_d = \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{32\mu U^2 r^2}{R^4} dz r d\theta dr = L \cdot \frac{32\mu U^2}{R^4}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 r d\theta dr =$$

$$E_d = L \cdot \frac{32\mu U^2}{R^4} \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{32\mu L U^2}{R^4} 2\pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R =$$

$$= \frac{32\mu L U^2}{\cancel{R^4}} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}2} R^4 = \boxed{16\mu L U^2 \pi = E_d}$$

la energía disipada x unidad de longitud es:

$$\boxed{E_d/L = 16\mu U^2 \pi}$$ ✓

d) $E_d/L = Q \Rightarrow 16\mu U^2 \cancel{\pi} = k(T-T_a)2\cancel{\pi}R$

$$\Rightarrow \mu = \frac{k(T-T_a)2R}{16U^2} = \boxed{\frac{k(T-T_a)R}{8U^2} = \mu(T)}$$

reemplazando valores es:

$$\boxed{\mu(T) = \frac{0{,}8\ W/m^2K\,(T-233°K)\cdot 0{,}25\,m}{8\cdot(3\ m/s)^2}}$$

EJERCICIO:

$$F(z) = \frac{a}{m} z^m \quad \text{con} \quad m = 1/2$$

$$z = (x+iy) \rightarrow z = \rho e^{i\varphi}$$

$$z^m = (x+iy)^m \longrightarrow z^m = \rho^m e^{im\varphi} \quad (\cos m\varphi + i\,\text{sen}\, m\varphi)$$

$$z^m = \rho^m(\cos m\varphi + i\,\text{sen}\, m\varphi)$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{a}{m} z^m = \frac{a}{m}\rho^m e^{im\varphi} = \frac{a}{m}\rho^m(\cos m\varphi + i\,\text{sen}\, m\varphi)$$

$$F_z = \underbrace{\frac{a}{m}\rho^m\cos m\varphi}_{\phi} + i\,\underbrace{\frac{a}{m}\rho^m\,\text{sen}\, m\varphi}_{\psi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 2a\rho^{1/2}\cos\varphi/2} \rightarrow \text{Función Potencial}$$

$$\boxed{\psi = 2a\rho^{1/2}\,\text{sen}\,\varphi/2} \rightarrow \text{Función corriente}$$

Calculo V_r y V_θ: $\rightarrow$ $\boxed{\bar\nabla\phi = \bar U}$

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2a}{2}\rho^{-1/2}\cos\varphi/2 = \boxed{\frac{a}{\sqrt{r}}\cos\varphi/2 = V_r}$$

$$V_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}2a\rho^{1/2}\frac{1}{2}\cos\varphi/2 = \frac{-1}{\sqrt{r}}\frac{a}{1}\,\text{sen}\,\varphi/2 = \boxed{\frac{-a}{\sqrt{r}}\,\text{sen}\,\varphi/2 = V_\theta}$$

la distribución de presiones la calculo x Bernoulli (entre ∞ y la sup de la placa plana)

$$\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \cancel{\rho g h} + P_\infty = \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \cancel{\rho g h} + P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho U_1^2 + P_\infty = \frac{1}{2}\rho(U_\infty^2 - U_1^2) + P_\infty$$

siendo $U_1^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{r}}\right)^2\cos^2\varphi/2 + \left(\frac{a}{\sqrt{r}}\right)^2\text{sen}^2\,\varphi/2 = \frac{a^2}{r}\underbrace{(\cos^2\varphi/2 + \text{sen}^2\,\varphi/2)}_{=1} =$

$$\boxed{U_1^2 = a^2/r}$$

reemplazando queda:

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\rho\left(U_\infty^2 - a^2/r\right) + P_\infty}$$ ✓

c) La fuerza es: $\boxed{F_x - i F_y = \dfrac{i\rho}{2}\underbrace{\oint\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2 dz}_{2\pi i a_{-1} = 2\pi i (Res f(z)) - a_{-1}}}$ Teorema de Blasius

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi i a_{-1} = -\pi\rho a_{-1}$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{a}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} z^{M-1} \qquad M = 1/2 \Rightarrow \frac{dF(z)}{dz} = a z^{-1/2} = \frac{a}{\sqrt{z}}$$

$$\left(\frac{dF(z)}{dz}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{z}}\right)^2 = \frac{a^2}{z} \; - a_{-1} \qquad a_{-1} = a^2$$

$$\Rightarrow F_x - iF_y = -\pi\rho a^2 \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\pi\rho a^2 \\ F_y = 0 \end{cases}$$

(1) (II)

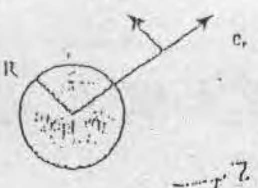
Puntos teóricos (duración 1 hora)

1. Flujos en difusores y expansiones. Eficiencia del difusor. Expresión de Carnot
2. Efectúe consideraciones acerca de la validez de la ecuación de Navier Stokes para la descripción de un flujo turbulento.
3. Que establece el teorema de Blasius. (Ver [illegible] pag 118) 59 del mio
4. Espesor de desplazamiento y de cantidad de movimiento ¿Que representan?
5. Explique la Teoría de Kolmogoroff (Ver)
6. Explique el fenómeno de atoramiento de toberas en flujos compresibles. (Fácil)

Puntos Prácticos (duración 1h30m)(Pueden utilizar el vademécum de fórmulas que se le entrega y deben devolver al final del examen)

a) En régimen permanente se propone para el campo de velocidades de una esfera quieta que es atacada por un medio fluido incompresible la siguiente expresión

$$\begin{cases} v_r' = U_\infty \cos\theta \left(1 - \dfrac{R^3}{r^3}\right) \\ v_\theta = -\dfrac{1}{2} U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(2 + \dfrac{R^3}{r^3}\right) \end{cases}$$



$\nabla^2 = 0$

Verificar que esta expresión satisface la ecuación que gobierna el flujo potencial y respeta las condiciones de borde.

b) Para una esfera desplazándose en un fluido inmóvil newtoniano en un flujo incompresible se obtiene despreciando los términos convectivos frente al resto el siguiente campo de velocidades:

$$v_r = U_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)$$

$$v_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right)$$

?

Verificar que esta expresión satisface la ecuación de Navier Stokes y respeta las condiciones de borde. ¿Porque [illegible] es diferente a la del caso a)?

¿Cual es la significación física de U_∞ en ambos casos? ¿De que factores depende?.

d- Determinar en ambos casos las fuerzas de presión que ejerce el fluido sobre la esfera en la dirección del movimiento.

e- Determinar para el caso b) la fuerza total en la dirección del movimiento y el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds. ¿Cual sería el límite de aplicabilidad de esta expresión?.

f- Proponga en forma cualitativa una curva del coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds. ¿Cuales son los regímenes que espera observar?.

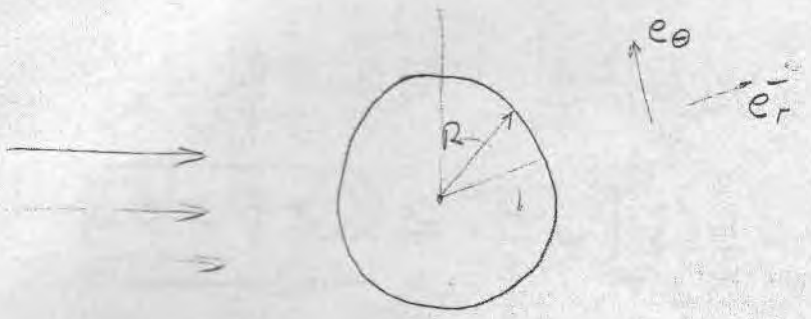
g- ¿En que zona de la curva del punto f) da una información útil el flujo potencial?. ¿Como complementaría el calculo para tener una información correcta?.

h- ¿En que zona de la curva del punto f) da una buena aproximación la expresión obtenida en c)?.

Re 100

- Fanno
- Bomba de Compresión
- Placa ... Poiseuille

EJERCICIO:



$$\begin{cases} V_r = U_\infty \cos\theta \left(1 - R^3/r^3\right) \\ V_\theta = -1/2\, U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(2 + R^3/r^3\right) \end{cases}$$

a) la ecuación p/ gobierno el flujo potencial es: $\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$

siendo $\boxed{\bar{\nabla}\phi = \bar{U}}$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\bar{e}_\theta = V_r \bar{e}_r + V_\theta \bar{e}_\theta = \bar{\nabla}\phi$$

<u>Si el flujo es potencial y es incompresible</u> $\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \bar{V} = 0}$

$$\operatorname{rot} \bar{V} = \left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\right)\bar{e}_r + \left(\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial V_z}{\partial r}}\right)\bar{e}_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\bar{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \bar{V} = \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\bar{e}_z$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} = +\dfrac{3}{2} U_\infty \operatorname{sen}\theta \dfrac{R^3}{r^4} \\ \dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 - R^3/r^3\right) \end{cases}$$

reemplazando queda

$$\operatorname{rot} \bar{V} = \frac{3}{2} U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^3}{r^4} - \frac{1}{2r} U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(2 + R^3/r^3\right) + \frac{1}{r} U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 - R^3/r^3\right)$$

$$\operatorname{rot} \bar{V} = \frac{3}{2} U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^3}{r^4} - \cancel{\frac{2}{2r} U_\infty \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{2r} U_\infty \operatorname{sen}\theta \frac{R^3}{r^3} + \cancel{\frac{1}{r} U_\infty \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{r} U_\infty \operatorname{sen}\theta R^3/r^3 =$$

$$\text{rot}\,\bar{V} = \tfrac{3}{2} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^4} - \frac{1}{2r} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^3} - \frac{1}{r} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^3} =$$

$$= \tfrac{3}{2} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^4} - \frac{1}{2} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^4} - U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^4} =$$

$$= U_\infty \,\text{sen}\,\theta \frac{R^3}{r^4} \underbrace{\left[\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} - 1\right]}_{0} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\bar{V} = 0}$$

las condiciones de borde son:

$$\text{Para } \underline{r = R} \rightarrow \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -\frac{3}{2} U_\infty \,\text{sen}\,\theta \xrightarrow{\theta = \pi/2} \cancel{V_\theta = -\frac{3}{2} U_\infty} \end{cases}$$

no hay q' calcularlo

$$\text{Para } \underline{r = \infty} \rightarrow \begin{cases} V_r = U_\infty \cos\theta \xrightarrow{\theta=\pi/2} V_r = 0 \\ \qquad \xrightarrow{\theta = 0} V_r = U_\infty \\ V_\theta = -U_\infty \,\text{sen}\,\theta \xrightarrow{\theta = \pi/2} V_\theta = -U_\infty \\ \qquad \xrightarrow{\theta = 0} V_\theta = 0 \end{cases} \quad |\bar{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = U_\infty$$

b) Planteo Navier Stokes en polares (Tengo V_r y V_θ)

$$\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial t}}^{0} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \cancel{V_z \frac{\partial V_r}{\partial z}}^{0} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial P}{\partial r}}^{0} + \nu\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}}^{0} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2}\right]$$

Estoy considerando un fluido newtoniano ... tiene viscosidad

$\Rightarrow$ no es potencial $\Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\bar{V} \neq 0}$. Por eso la expresión es distinta.

me fijo q' V_r y V_θ verifique la ecuación de N.S.

$$V_r = U_\infty \cos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right]$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = U_\infty \cos\theta\left[\frac{3R}{r^2}-\frac{3R^3}{2r^4}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = U_\infty \cos\theta\left[-\frac{6R}{r^3}+\frac{12}{2}\frac{R^3}{r^5}\right]$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial\theta} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta} = -U_\infty \cos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right]$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = -U_\infty \cos\theta\left[1-\frac{3R}{4r}+\frac{R^3}{4r^3}\right]$$

Si se reemplazan en N.S se deberían verificar.

$$V_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta\left(1-\frac{3R}{4r}+\frac{R^3}{4r^3}\right)$$

las condiciones de contorno son:

Para $r=R \rightarrow V_r = U_\infty \cos\theta\left[1-3/2+\frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{V_r = 0}$ ✓

$V_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta\left(1-3/4+\frac{1}{4}\right) = \boxed{-\frac{U_\infty}{2}\operatorname{sen}\theta = V_\theta}$ no hay p' calcularlo

Para $r=\infty \rightarrow V_r = \boxed{U_\infty \cos\theta = V_r}$

$V_\theta = \boxed{-U_\infty \operatorname{sen}\theta = V_\theta}$

en $r=R$ no tengo vel radial ($V_r=0$)

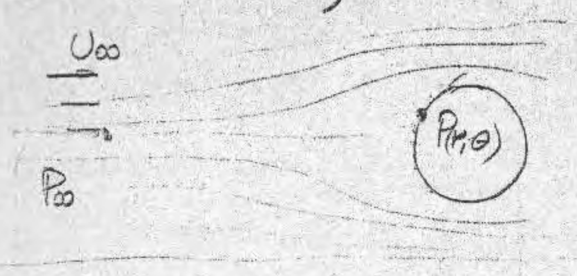
en $r=\infty$ $\boxed{|\bar{V}| = U_\infty}$ $\sqrt{V_r^2+V_\theta^2} = \sqrt{U_\infty^2\cos^2\theta + U_\infty^2\operatorname{sen}^2\theta} =$

$\sqrt{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\,U_\infty^2} = U_\infty$

c) en el caso a) la U_∞ es la velocidad del fluido, y en el caso b) es la velocidad de la esfera (el fluido está inmóvil)

d) Lo q' está pidiendo es la distribución de presiones sobre la superficie de la esfera.

Para el caso a): Planteo Bernoulli entre el ∞ y la superficie:



$$\tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \cancel{\rho g h} + P_\infty = \tfrac{1}{2}\rho U_1^2 + \cancel{\rho g h} + P_{(r,\theta)} \Rightarrow$$

siendo $\bar{U}_1^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = U_\infty^2 \cos^2\theta \left(1 - R^3/r^3\right)^2 + \frac{1}{4} U_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(2 + R^3/r^3\right)^2 =$

$$\Rightarrow P_{(r,\theta)} = P_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \tfrac{1}{2}\rho U_1^2 = \boxed{\tfrac{1}{2}\rho\left(U_\infty^2 - U_1^2\right) + P_\infty = P_{(r,\theta)}}$$

$$\boxed{P_{(r,\theta)} = \tfrac{1}{2}\rho\left[U_\infty^2 - \left(U_\infty^2 \cos^2\theta\left(1 - R^3/r^3\right)^2 + \tfrac{1}{4}U_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta\left(2 + R^3/r^3\right)^2\right)\right]}$$

Para el caso b) me paro arriba de la esfera y me queda similar al caso anterior: el fluido se desplaza con una vel $V = U_\infty$. Planteo Bernoulli y llego a una expresión de la presión similar:

$$P_{(r,\theta)} = \tfrac{1}{2}\rho\left(U_\infty^2 - U_1^2\right) + P_\infty =$$

$$P_{(r,\theta)} = \tfrac{1}{2}\rho\left(U_\infty - \left[U_r^2 + U_\theta^2\right]\right) + P_\infty =$$

$$U_r^2 + U_\theta^2 = U_\infty^2 \cos^2\theta\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)^2 + U_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)^2 =$$

Esto fue calculado sobre una terna móvil y se mueve a una velocidad U_∞.

e) La fuerza lo puedo expresar:

$$F = \iint_S \bar{T}\, ds = \iint_S p\, ds + \iint_S \tau_w\, ds$$

siendo p = presión en la superficie y

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho U^2} = \frac{64}{Re} \quad \text{con} \quad Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$$

$$\tau_w = \frac{64 \rho U^2}{8\, Re}$$

supongo régimen laminar para q' se cumple: $\lambda = \frac{64}{Re}$

$$\Rightarrow \boxed{F = \iint_S \bar{T}\, ds = \iint_S p\, ds + \iint \frac{64 \rho U^2}{8\, V \cdot D} \nu\, ds}$$

El coeficiente de arrastre es: $C_D = \dfrac{F}{1/2\, \rho U^2 A}$

El límite de aplicabilidad de la expresión es q' tiene solamente para flujo laminar ya q' se cumple para $\lambda = \frac{64}{Re}$

Para otros regímenes no